This is a reproduction of a library book that was digitized by Google as part of an ongoing effort to preserve the information in books and make it universally accessible.

Google™ books

https://books.google.com

Informazioni su questo libro

Si tratta della copia digitale di un libro che per generazioni è stato conservata negli scaffali di una biblioteca prima di essere digitalizzato da Google nell'ambito del progetto volto a rendere disponibili online i libri di tutto il mondo.

Ha sopravvissuto abbastanza per non essere più protetto dai diritti di copyright e diventare di pubblico dominio. Un libro di pubblico dominio è un libro che non è mai stato protetto dal copyright o i cui termini legali di copyright sono scaduti. La classificazione di un libro come di pubblico dominio può variare da paese a paese. I libri di pubblico dominio sono l'anello di congiunzione con il passato, rappresentano un patrimonio storico, culturale e di conoscenza spesso difficile da scoprire.

Commenti, note e altre annotazioni a margine presenti nel volume originale compariranno in questo file, come testimonianza del lungo viaggio percorso dal libro, dall'editore originale alla biblioteca, per giungere fino a te.

Linee guide per l'utilizzo

Google è orgoglioso di essere il partner delle biblioteche per digitalizzare i materiali di pubblico dominio e renderli universalmente disponibili. I libri di pubblico dominio appartengono al pubblico e noi ne siamo solamente i custodi. Tuttavia questo lavoro è oneroso, pertanto, per poter continuare ad offrire questo servizio abbiamo preso alcune iniziative per impedire l'utilizzo illecito da parte di soggetti commerciali, compresa l'imposizione di restrizioni sull'invio di query automatizzate.

Inoltre ti chiediamo di:

+ *Non fare un uso commerciale di questi file* Abbiamo concepito Google Ricerca Libri per l'uso da parte dei singoli utenti privati e ti chiediamo di utilizzare questi file per uso personale e non a fini commerciali.

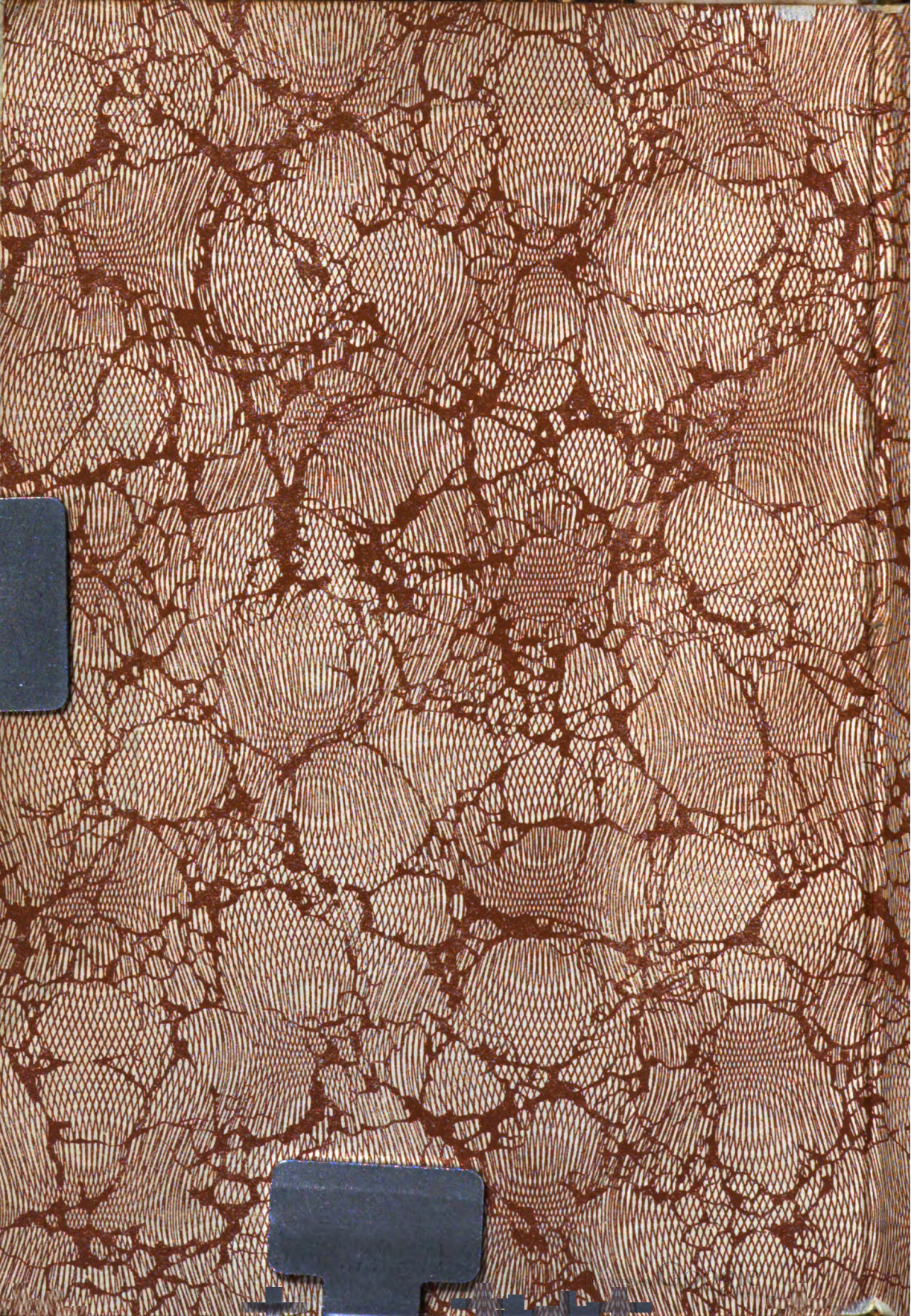
+ *Non inviare query automatizzate* Non inviare a Google query automatizzate di alcun tipo. Se stai effettuando delle ricerche nel campo della traduzione automatica, del riconoscimento ottico dei caratteri (OCR) o in altri campi dove necessiti di utilizzare grandi quantità di testo, ti invitiamo a contattarci. Incoraggiamo l'uso dei materiali di pubblico dominio per questi scopi e potremmo esserti di aiuto.

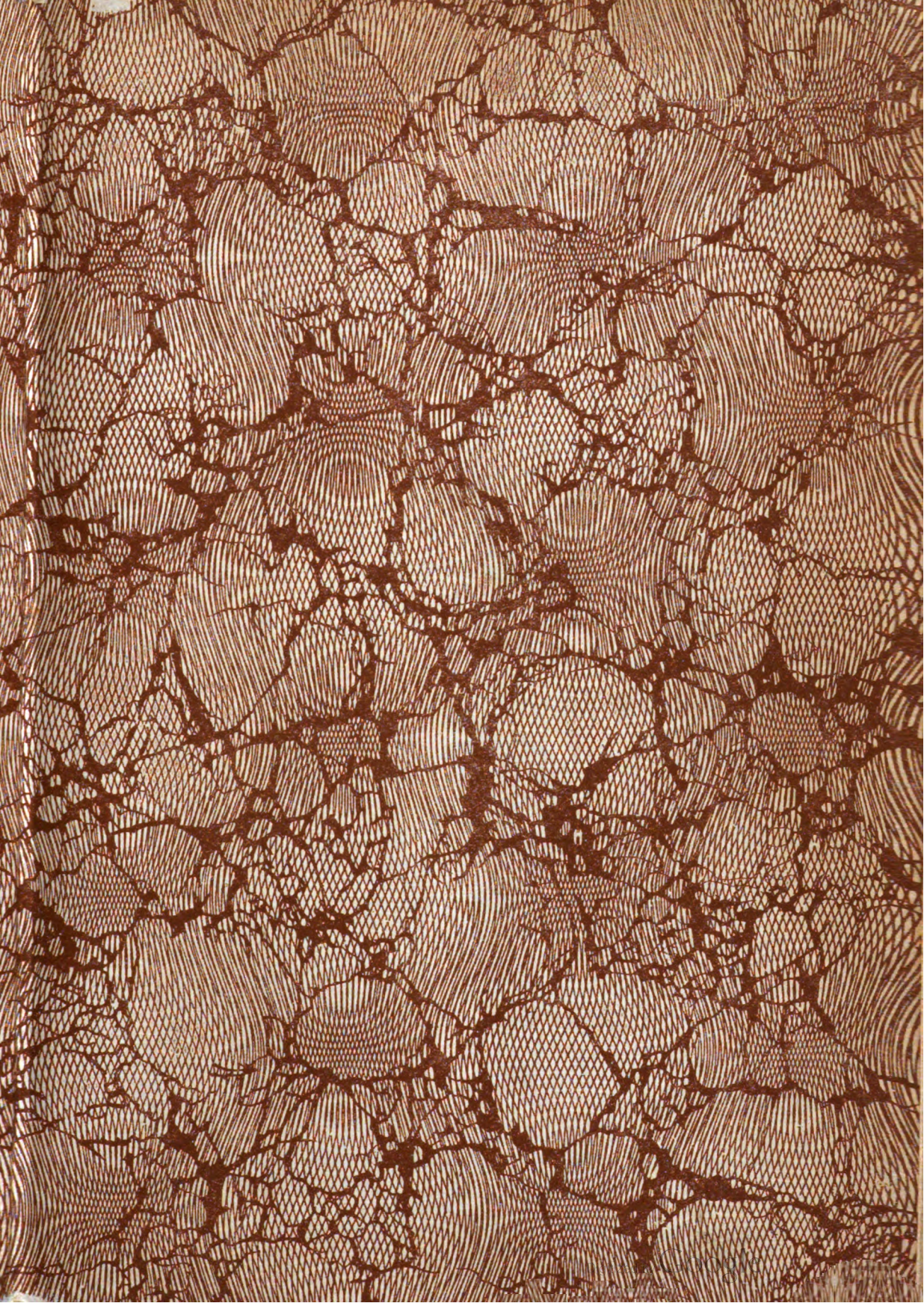
+ *Conserva la filigrana* La "filigrana" (watermark) di Google che compare in ciascun file è essenziale per informare gli utenti su questo progetto e aiutarli a trovare materiali aggiuntivi tramite Google Ricerca Libri. Non rimuoverla.

+ *Fanne un uso legale* Indipendentemente dall'utilizzo che ne farai, ricordati che è tua responsabilità accertati di farne un uso legale. Non dare per scontato che, poiché un libro è di pubblico dominio per gli utenti degli Stati Uniti, sia di pubblico dominio anche per gli utenti di altri paesi. I criteri che stabiliscono se un libro è protetto da copyright variano da Paese a Paese e non possiamo offrire indicazioni se un determinato uso del libro è consentito. Non dare per scontato che poiché un libro compare in Google Ricerca Libri ciò significhi che può essere utilizzato in qualsiasi modo e in qualsiasi Paese del mondo. Le sanzioni per le violazioni del copyright possono essere molto severe.

Informazioni su Google Ricerca Libri

La missione di Google è organizzare le informazioni a livello mondiale e renderle universalmente accessibili e fruibili. Google Ricerca Libri aiuta i lettori a scoprire i libri di tutto il mondo e consente ad autori ed editori di raggiungere un pubblico più ampio. Puoi effettuare una ricerca sul Web nell'intero testo di questo libro da `http://books.google.com`





Digitized by Google

BOLLETTINO DI BIBLIOGRAFIA

E

STORIA

DELLE

SCIENZE MATEMATICHE

pubblicato per cura di

GINO LORIA

Anno IX - Fasc. 1.°

TORINO
CARLO CLAUSEN (HANS RINCK Succ.)
Libraio delle LL. MM. il Re e la Regina

1906.

Digitized by Google

Opere del Prof. GINO LORIA

della R. Università di Genova

IL PASSATO ED IL PRESENTE

DELLE PRINCIPALI

TEORIE GEOMETRICHE

Seconda edizione accresciuta ed interamente rifatta

Lire 8.

SPEZIELLE

algebraische und transscendente

EBENE KURVEN

THEORIE UND GESCHICHTE

Autorisierte, nach dem italienischen Manuskripte bearbeitete deutsche Ausgabe

von

FRITZ SCHÜTTE

Mit 174 Figuren auf 17 lithographirten Tafeln

Mark 28.

LE SCIENZE ESATTE

NELL' ANTICA GRECIA

Libro I e II: *esauriti.*

Libro III. - **Il substrato matematico della filosofia naturale dei Greci. L. 4 —**

Libro IV. - **Il periodo argenteo della geometria greca . . . . . „ 4 —**

Libro V. - **L' aritmetica dei Greci . . . . . „ 5 —**

LE

TRASFIGURAZIONI DI UNA SCIENZA

DONNE MATEMATICHE

Seconda edizione accresciuta di note

Lire 2.

Per commissioni rivolgersi alla

Libreria CARLO CLAUSEN – HANS RINCK Succ.

Via Po, 11 — TORINO — Via Po, 11

Digitized by Google

BOLLETTINO

DI

BIBLIOGRAFIA E STORIA

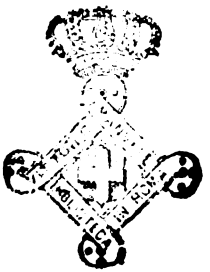
DELLE

SCIENZE MATEMATICHE

PUBBLICATO PER CURA

DI

GINO LORIA



ANNO IX.

1906

TORINO

CARLO CLAUSEN

HANS RINCK SUCC.

Digitized by Google

Proprietà letteraria

Genova. – Tipografia Sordomuti

Digitized by Google

INDICE

R. Marcolongo. Sul teorema della composizione delle rotazioni istantanee, appunti per la storia della meccanica nel secolo XVIII, p. 1-12.
R. Bonola. Il modello di Beltrami di superficie a curvatura costante negativa, p. 33-38.
G. Loria. Matematica e matematici del Giappone, p. 65-72

RECENSIONI ED ANNUNZI.

Duhem. Les origines de la statique [G. Vailati], p. 13-18. — **Thomae.** Sammlung von Formeln und Sätzen [G. L.], p. 18. — **Fricke.** Hauptsätze der Differential- und Integralrechnung, p. 18-19. — **Arzelà.** Trattato di algebra elementare [C. Severini], p. 19-20. — **Gans.** Einführung in die Vektoranalysis [G. L.], p. 20. — **Farkmann.** Aufgaben aus der analytischen Mechanik [G. L.], p. 21. **Grassmann.** Ges. Werke, II. [G. L.], p. 21-22. — **Appell-Chappuis.** Leçons de mécanique élémentaire [R. Marcolongo], p. 22-24. — **Lechalas.** Introduction à la géométrie générale, p. 24-25. — **Fisher.** Kurze Einleitung ecc. [G. L.], p. 25. — **Vahlen.** Abstrakte Geometrie [M. Dehn], p. 25-28. — **Graf.** Briefwechsel von L. Schlafli mit A. Cayley [G. L.], p. 29. — **Hermite.** Oeuvres publiées sous les auspices de l'Académie des Sciences [G. L.], p. 38-39. — Correspondance d'**Hermite** et de **Stieltjes** [G. L.], p. 39-40. — **E. R. Neumann.** Studien über die Methoden ecc. [G. Lauricella], p. 40-46. — **Amodeo.** Vita matematica napoletana [G. L.], p. 46. — **Bucherer.** Elemente der Vektor-Analysis [G. L.], p. 46. — **Wegener.** Die Alfonsinischen Tafeln für den Gebrauch eines modernen Rechners [F. Porro], p. 47. — **Wertheim.** Anfangsgründe der Zahlenlehre [G. Vacca], p. 48-50. — **Schröder.** Die Anfangsgründe der Differentialrechnung und Integralrechnung [G. L.], p. 50-51. — **Severi.** Complementi di geometria proiettiva [E. Ciani], p. 52-56]. **Salvadori.** Esposizione della teoria delle somme di Gauss [G. Vivanti], p. 57. **Biermann.** Vorlesungen über mathematische Näherungsmethoden [G. Vivanti], p. 57-58. — **Stoltz u. Gmeiner.** Einleitung in die Funktionentheorie [G. Vivanti], p. 58. — **Bachmann.** Allgemeine Arithmetik der Zahlenkörper [G. Vivanti], p. 58-59. — Annuaire pour l'an 1906, publié par le Bureau des Longitudes [G. L.], p. 59-60. — **F. G. M.** Cours de géométrie élémentaire, p. 60. — **Schlœmilchs** Handbuch der Mathematik [G. L.], p. 61. — **Bürklen.** Aufgabensammlung zur analytichen Geometrie der Ebene [G. L.], p. 61-62. — **Schoute.** Mehrdimensionale Geometrie [G. L.], p. 73-75. — **Laisant.** Initiation mathématique [G. L.], p. 75-76. — **Caldarera.** Corso di Meccanica razionale [T. Levi-Civita], p. 76-77. — **Nielsen.** Handbuch der Theorie der Gammafunktion [G. Vivanti], p. 77-80. — **Czuber.** Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung [G. Vivanti], p. 80. — **Arrighi.** La storia della matematica in relazione con lo sviluppo del pensiero [G. L.], p. 80-81. — **Castelnuovo.** Lezioni di Geometria analitica e proiettiva [Ugo Amaldi], p. 82. — **Campbell.** Introductory Treatise on Lie's Theory of Finite Continuous Transformation Groupes [U. Amaldi], p. 83-84. — **Teixeira.** Tratado de las curvas especiales notables [G. L.], p. 84-86. — **Blythe.** On models of cubic surfaces [G. L.], p. 86-87. — **Guichard.** Sur les systèmes triplement indéterminés et sur les systèmes triple-orthogonaux [G. L.], p. 87. — **Wieleitner.** Theorie der ebenen algebraischen Kurven höherer Ordnung [G. L.], p. 88-89. — **Kommerell.**

Digitized by Google

Allgemeine Theorie der Raumkurven und Flächen [G. L.], p. 89. — **Schubert.** Auslese aus meiner Unterrichts-und Vorlesungspraxis, II [G. L.], p. 89-90. **Thomae.** Grundriss einer analytischen Geometrie der Ebene — **Staude.** Analytische Geometrie des Punktes — **Heffter u. Koehler.** Lehrbuch der analytischen Geometrie [G. L.], p. 90-92 — **Schröder.** Vorlesungen über die Algebra der Logik. II, 2 [G. L.], p. 90-92. — **Hjelmslev.** Deskriptivgeometri [G. L.], p. 97-99. — **Fine.** A College Algebra [G. Fubieri], p. 99-103. — **Simon.** Über die Entwicke ung der Elementar-Geometrie [G. L.], p. 103-104. — **Simon.** Methodik der elementaren Arithmetik in Verbindung mit algebraischer Analysis [G. L.], p. 104-106 — **Morandi.** Généalogie de la famille de Gaspard Monge [G. L.], p. 106. — **Bonola.** La geometria non-euclidea [U. Amaldi], p. 107-109 — **Pesloüan.** N. H. Abel. Sa vie et son oeuvre [G. L.], p. 109-110. — The Teaching of Elementary Mathematics [G. L.], p. 110. — **Bruns.** Wahrscheinlichkeitsrechnung und Kollektivmasslehre [P. Pizzetti], p. 111-114. — **Holzmüller.** Planimetrie [G. L.], p. 114-115. — **Muir.** The Theory of Determinants in the historical order of developement [G. L.], p. 115-116. — **Osgood.** Lehrbuch der Funktionentheorie [G. Vivanti], p. 116-117. — **Del Re.** Lezioni sulle forme fondamentali dello spazio rigato [G. L.], p. 117-118. — **Macaulay.** Geometrical Conics [G. L.], p. 118-119. — **Mahler.** Ebene Geometrie [G. L.], p. 119. — **Dochlemann.** Projective Geometrie in synthetischer Behandlung [G. L.], p. 119. — **Vonderlind.** Parallelperspektive [G. L.], p. 120. — **Horn.** Gewöhnliche Differentialglei hungen beliebiger Ordnung [G. Vivanti], p. 120. — **Fr chet.** Sur quelques points de calcul fonctionnel [G. Fubini], p. 120-124.

PROGRAMMI E RIASSUNTI DI CORSI UNIVERSITARI.

Università di Messina. Corso di Fisica-Matematica tenuto dal Prof. R. Marcolongo, p. 92-94.

NOTIZIE.

Monumento a Copernico in Frauenburg. — Preparazione d'un'edizione completa delle opere di Leibniz. — Pubblicazioni recenti sulla storia delle scienze positive. — Il vol. III dei Rendiconti delle sedute della Società Matematica di Berlino. — Un articolo degno di venire letto. — Una rivista che nasce dalle ceneri di un'altra. — Università di New York. — Progressi della « fusione » in Francia, p. 29-32.

I Premi dell'Istituto di Francia. — Sull'insegnamento della storia delle matematiche in Russia. — Pubblicazioni recenti sulla storia delle matematiche. — Per favorire le ricerche sul calcolo geometrico. — Tema proposto dal politecnico di Monaco. — La nozione dell'infinito secondo gli studi più recenti. — Temi posti a concorso dalle università di Halle e Zurigo. — La Società Scientifica di Bruxelles. — Premio della Fondazione Bolyai. — Il I anniversario della morte di P. Tannery, p. 62-64.

Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften. — Pubblicazioni recenti sulle storia delle matematiche. — Carteggio di Huygens. — La casa di Eulero a Berlino. — Tema proposto dall'Università di Kiel per l'anno 1906-7. — Monumento a L. Cremona. — Un grande nell'oblio — Per gli amatori di ritratti. — Il IV Vol. dei Resoconti delle sedute della Società matematica di Berlino. — La logica e la filosofia contemporanea, p. 94-96.

Da un discorso postumo di P. Tannery. — Tema proposto dall'Accademia delle Scienze del Belgio per l'anno 1907. — Il 13 Febbraio 1905. — Pubblicazioni recenti sulla storia delle matematiche. — La scorreria fatta da Jacobi nella politica. — Un'opera classica sull'attuaria. — Catalogo internazionale della letteratura scientifica. — Pubblicazioni recenti sulla storia delle scienze positive.

Digitized by Google

BOLLETTINO DI BIBLIOGRAFIA E STORIA
DELLE
SCIENZE MATEMATICHE
ANNO IX. — **Gennaio, Febbraio e Marzo** — 1906.

SUL TEOREMA DELLA COMPOSIZIONE DELLE ROTAZIONI ISTANTANEE

APPUNTI PER LA STORIA DELLA MECCANICA NEL SECOLO XVIII

DI R. MARCOLONGO

Nel « *Discorso matematico sopra il rotamento momentaneo dei corpi* », sul quale abbiamo già intrattenuto i lettori del *Bollettino*, 1.° fascic. 1905, il Mozzi, al § 52, scrive:

« Il componimento de' moti rettilinei del centro di gravità è inse-
« gnato dalla Meccanica elementare, e quello de' movimenti di rotazione
« che si suppongono nello stesso tempo impressi in un qualsivoglia
« mobile fu ultimamente scoperto da due celebri geometri della nostra
« Italia, che per diverse vie arrivarono alla medesima verità ».

Il Mozzi stesso, in nota, dà i nomi dei due geometri: « il signor « D. Tommaso Perelli, e il Prof. Frisi Barnabita pubblici professori « nell' Università di Pisa »; ma non dà alcun' altra informazione e schiarimento.

Ora la scoperta della legge di composizione dei moti istantanei di rotazione intorno ad assi concorrenti, di cui più precisamente intende parlare il Mozzi, è certamente importante per la storia della Meccanica e specialmente per quella della Cinematica di un corpo rigido.

Noi ci proponiamo perciò in questa nota di mostrare l' esattezza di ciò che il Mozzi asserisce; torneremo ancora sul lavoro del geometra fiorentino ed accenneremo pure a qualche altra questione relativa alla storia della Meccanica del secolo XVIII.

***

Il d'Alembert che pel primo ha dedicato numerosi lavori al moto di un corpo rigido intorno a un punto fisso; che ha dimostrato l'esistenza dell' asse istantaneo di rotazione; non si occupa della composizione dei moti di rotazione (1).

(1) *Recherches sur la précession des équinoxes.* Paris 1749. *Opuscules mathém. ou memoires sur différents sujets de geometrie, de mechanique, d'optique, d'astronomie etc.* T. I (1761) p. 74; T. IV (1768) p. 1-31; T. VII (1770) p. 312.

Digitized by Google

Euler, prima della pubblicazione della sua *Theoria motus* (1765), ha scritto sull'argomento quattro memorie pubblicate nella raccolta: *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin*. Nella prima *(Découverte d'un nouveau principe de mécanique*, Mém. pour 1750, pp. 185-217), Euler dà le equazioni del moto curvilineo di un punto libero (1); le formule celebri per le componenti della velocità di un punto del corpo secondo una terna ortogonale connessa col corpo; il teorema sull'esistenza dell'asse istantaneo di rotazione e le equazioni differenziali del moto del corpo (mobile intorno ad un punto fisso); ma non essendo ancora note nè le proprietà, nè l'esistenza degli assi principali d'inerzia, quelle equazioni differenziali, contenendo ancora i prodotti d'inerzia, erano molto complicate e ben poco maneggevoli. In queste equazioni figurano: la velocità angolare istantanea ω del corpo intorno all'asse di rotazione, e i prodotti di ω per i coseni degli angoli dell'asse colla terna mobile; ed Euler si serve anzi spesso delle abbreviazioni $x = \omega \cos \alpha$, ecc...; ma nè in questa, nè nelle memorie successive (di cui dobbiamo dare un cenno), nè finalmente nella *Theoria motus*, egli dà la interpretazione cinematica di x, y, z, che avrebbe subito condotto al teorema della composizione delle rotazioni, sebbene in modo alquanto indiretto e artificioso. Nè, del resto, per la ricerca delle equazioni del moto e per la loro trattazione, al modo di Euler, è indispensabile tale interpretazione.

I *Mém. pour 1760*, pp. 176-277 (il volume ha però la data del 1767, ed è ben noto che la pubblicazione dei volumi dell'Accademia non avveniva regolarmente) contengono una seconda memoria: « *Du mouvement d'un corps solide quelconque lorsqu'il tourne autour d'un axe mobile* », che è certamente anteriore alle altre di cui ora diremo. Euler infatti non fa ancora uso degli assi principali d'inerzia, e, occupandosi della ricerca degli assi liberi di rotazione, giunge ad un'equazione di terzo grado e conclude che vi ha sempre un asse libero di rotazione e che ve ne possono essere tre *se l'equazione cubica ha tre radici reali* (2).

Assai più importanti sono gli altri due lavori delle Memorie pel 1758 (il volume fu edito nel 1765) e che effettivamente costituiscono

(1) Erano già state trovate da Maclaurin. *A Treatise of Fluxions*. Edinburgh 1742. Vedi (nella traduzione francese di Pezenas, Paris 1749) gli art. 465-469 (1.° vol.) e 884 (2.° vol.).

(2) Che Euler avesse invece trovato i principali risultati di questa teoria prima del 1760 risulta non solo dalle Memorie per il 1758, ma anche da una lettera a Lagrange (23 ottobre 1759) in cui Euler dà un sunto delle sue ricerche e annuncia di aver già terminato il terzo volume della Meccanica, che è poi la *Theoria motus*, pubblicata solamente nel 1765. (Vedi la corrispondenza di Lagrange - *Oeur. comp.* Vol. XIV, p. 169).

Digitized by Google

la parte fondamentale della *Theoria motus*. Le *Recherches sur la connaissance mécanique des corps* sono una completa teoria dei momenti d'inerzia; vi si dimostra l'esistenza degli assi principali, considerati sotto il duplice aspetto di assi liberi di rotazione e di rette cui corrisponde il massimo o il minimo momento d'inerzia. Euler non nomina mai il Segner, a cui però non manca di render giustizia nella prefazione della *Theoria motus*.

L'altra memoria che segue immediatamente questa e intitolata: « *Du mouvement de rotation des corps solides autour d'un axe variable* » pp. 154-193, è tra le più eleganti e notevoli scritte da Euler. Valendosi dei concetti e delle proprietà dimostrate nella memoria precedente, egli trova quelle equazioni differenziali del moto di un corpo rigido, che vengono appunto chiamate di Euler e le integra nel caso dell'assenza di forze esterne; i prodotti $\omega \cos \alpha$, ecc., che vi figurano restano però sempre senza interpretazione (1).

Nulla di più e di meglio si trova in quella memoria di J. A. Euler, premiata nel 1761 dall'Accademia di Parigi: *Recherches sur l'arrimage des vaisseaux*, pp. 1-56 (2). La parte più notevole di tale memoria è la conclusione (pp. 23-56); in cui l'A. si occupa appunto della ricerca degli assi principali e del moto di un corpo rigido. Ma è troppo evidente l'influenza, per non dir altro, di L. Euler; nell'ultima parte specialmente la memoria è l'esatta riproduzione dell'ultima di L. Euler.

Nè della composizione delle rotazioni, è quasi inutile avvertirlo, si occupano i trattati della prima metà del secolo XVIII. Basti citare per tutti la *Mechanica sive Motus Scientia analytice exposita* dell'Euler, in due volumi, e la cui prima edizione è del 1736.

Un semplice cenno sulla decomposizione di una rotazione istantanea secondo tre assi ortogonali è fatto da Lagrange nella sua *Théorie de la libration de la lune* (3); ma è nella *Mécanique analytique* (1788) che, col metodo indiretto delle proiezioni ortogonali, il teorema della composizione è espresso nella sua forma attuale. « On doit conclure, en « général, scrive Lagrange, que la composition et la décomposition « des mouvements de rotation se fait de la même manière et suit

(1) A pag. 171 di questa memoria si trovano anche le formule che dànno le derivate dei nove coseni direttori della terna mobile e che sono ben note col nome di Poisson.

Su tutto l'argomento, vedi: GILBERT. *Étude historique et critique sur le problème de la rotation* etc. (Ann. de la Soc. scientif. de Bruxelles, vol. II, pp. 255-350. (1878)).

(2) *Recueil des pieces qui ont remporté les prix de l'Académie Royale des Sciences depuis leur fondation.*, tom. VII, Paris 1769.

(3) *Nouveaux Mém. de l'Académie Roy. de Berlin*, 1780 — *Oeuv. compl*, vol. V, p. 43.

Digitized by Google

« les mêmes lois que la composition ou décomposition des mouvements « rectilignes, en substituant aux mouvements de rotation des mouvements rectilignes, suivant la direction des axes de rotation » (1). Naturalmente si parla sempre di rotazioni intorno ad assi concorrenti.

Il teorema di cui ci occupiamo, che non trovasi nelle opere di Euler e di d'Alembert; che assai tardi è enunciato da Lagrange, è stato effettivamente dato dal Frisi poco oltre la metà del secolo XVIII.

***

Nel primo volume delle Dissertazioni varie del Frisi, edite a Lucca nel 1759, è contenuta una memoria sul problema della precessione degli equinozi (2).

La memoria, poco importante del resto (3), contiene (prop. VII-X) la soluzione del problema della composizione delle rotazioni istantanee intorno ad assi concorrenti. Ecco in breve il metodo seguito dal Frisi.

Si dimostra anzitutto (prop. VII) che la velocità di un punto che ruota intorno ad un asse è la risultante delle velocità delle proiezioni del punto su due assi ortogonali tra loro e all'asse di rotazione; e quindi che (coroll.) se un corpo ha da subire due rotazioni intorno ad assi concorrenti, la velocità di un punto qualunque esterno al piano dei due assi si può decomporre in quattro: due eguali alle velocita della proiezione del punto sul piano nei due moti; altre due normali ai due assi e contenute nel piano di essi. Poscia si osserva (prop. VIII) che in tal piano vi ha un'asse che divide l'angolo in parti i cui seni sono inversamente proporzionali alle rispettive velocità angolari e i cui punti hanno velocità nulla nel moto risultante (asse della rotazione risultante). Dopo questo, con facili metodi di composizione e decomposizione (che potrebbero rendersi assai più semplici valendosi della trigonometria) si dimostra che la velocità di un punto qualunque del piano dei due assi (prop. IX) o, col sussidio del coroll. alla prop. VII,

---

(1) *Mecanique analytique.* — *Oeuv. compl.*, vol. XI, pp. 58-63 - 1re partie, § III.

(2) PAULLI FRISII Mediolanensis Cler. Reg Congr. D. Paulli in Pisano Gymnasio publici professoris, Bononiensis, Berolinensis, et Petropolitanae Scientiarum Academiae socii etc. DISSERTATIONUM VARIARUM. Tomus primus. Lucae MDCCLIX. Problematum praecessionis aequinoctiorum nutationis terrestris axis, aliarumque vicissitudinum diurni motus geometrica solutio, cujus specimen a Regia Berolinensi Scientiarum Academiae anno MDCCLVI praemium obtinuit. (pp. 1-81).

(3) Il P. Frisi (professore a Pisa dal 1756 al 64) è spessissimo nominato nella corrispondenza tra Lagrange e d'Alembert (Oeuv. compl. de Lagrange Vol. XIII), i quali, pare, non avessero grande opinione dei lavori di Meccanica celeste del Frisi. Vedasi specialmente quanto è scritto a pag. 160 a proposito del premio dell'Accademia di Parigi pel 1772 sul problema dei tre corpi; premio al quale aveva concorso il Frisi e che fu diviso tra Euler e Lagrange. Lagrange (ibid. p. 291) esprime pure un giudizio severo sulla: « *Cosmographia physica et mathematica* » del Frisi (Milano 1774).

Digitized by Google

di un punto qualunque del corpo (prop. X) è perpendicolare al piano che contiene il punto e l'asse (risultante) ed è proporzionale alla distanza del punto dell'asse. — Dunque il moto risultante è una rotazione intorno all'asse.

Il calcolo del fattore di proporzionalità (assai facile a compiersi colle stesse formule del Frisi) mostrerebbe di più che la velocità angolare risultante sta ad una delle componenti nel rapporto inverso dei seni degli angoli degli assi. Finalmente nel corollario che conclude la ricerca il Frisi osserva:

« *in.... quocumque corpore binos motus rotationis in motum unum* « *componi, eadem prorsus ratione, qua duae vires duobus lateribus* « *parallelogrammi alicujus expressae tertiam vim componunt, quae* « *diagonali exprimitur* ».

La dimostrazione del Frisi è non solo semplice ma anche diretta, e, in quanto non fa uso dei soliti metodi delle coordinate ortogonali, si accosta singolarmente ai metodi che, in tali questioni, si seguono oggidì. Il Frisi nota è vero l'analogia tra la composizione delle rotazioni e quella delle forze; ma solo nel senso che la velocità risultante sta alle componenti nel ben noto rapporto; e da questo punto di vista è assai meno esplicito e chiaro di Lagrange, il quale riporta sugli assi di rotazione lunghezze proporzionali alle corrispondenti velocità angolari. Però se tutto questo conferisce chiarezza e rappresentazione semplice del teorema, quanto è esposto dal Frisi è sufficiente per tutte le applicazioni analitiche.

***

In due successive e assai posteriori pubblicazioni (che per noi presentano interesse sotto altri punti di vista) il Frisi è tornato sullo stesso argomento: e precisamente nella Meccanica edita a Milano nel 1783 (1) e in una memoria dell'Istituto di Bologna (2). Specialmente nella Meccanica (Cap. I, Lib. 2.°: *De motu rotationis circa axem datum*, p. 183), il Frisi riproduce, migliorandola, la ricerca che abbiamo precedentemente riassunta. Non solo sono eliminate quelle lacune di cui s'è detto; non solo l'uso della trigonometria (già diventato comune) rende più semplice la dimostrazione; ma la ricerca è completata da un altro notevole teorema (III) di cui però il Frisi non ha fatto rile-

(1) PAULLI FRISII Operum. Tom. secundus *Mechanicam universam et mechanicae applicationem ad aquarum fluentium Theoriam continens*. Mediolani MDCCLXXXIII. Le *Instituzioni di Meccanica, d'Idrostatica e dell'Architettura Statica e Idraulica* ad uso della Regia Scuola eretta in Milano per gli architetti e per gl'ingegneri, Milano 1777, sono meno importanti e molto elementari.

(2) De Bononiensi Scientiarum et Artium Instituto atque Academia Commentarii. Tom. sextus, 1783. PAULLI FRISII: *De rotatione corporum*, pp. 45-70.

Digitized by Google

vare tutta l'importanza, e nè vi ha nulla ricavato. Il teorema riguarda infatti la decomposizione di un moto di rotazione istantaneo, intorno ad un asse, in due altri: uno di rotazione intorno ad un asse parallelo, ed uno di traslazione normale ai due assi; e nel coroll. 2.° dà pure la composizione di una rotazione e di una traslazione normale. I quali teoremi, per non dir d'altro, avrebbero permesso al Frisi di estender subito il teorema della composizione delle rotazioni al caso degli assi paralleli, di cui invece non fa parola. E poi tutta la teoria esposta poteva essere, come la legge del parallelogrammo delle forze al dir dello stesso Frisi, il filo d'Arianna da ritrovarsi in mezzo ai più intricati laberinti della Cinematica!

Del resto questo libro di Meccanica, venuto alla luce un anno prima della morte del Frisi e solo cinque anni avanti la pubblicazione della *Mécanique analytique*, non è molto notevole, anche tenuto conto del tempo in cui fu scritto (1).

La parte più importante ed originale del libro è quella che tratta della composizione dei moti di rotazione e l'altra in cui si riassume quanto v'ha di più importante nel *Discorso* del Mozzi. E se si riflette che la Meccanica del Frisi ebbe moltissima diffusione, si troverà sempre più strano come l'aureo opuscolo del Mozzi sia potuto passare inosservato, quasi, per tanto tempo.

Tanto la prefazione della Meccanica, quanto la introduzione alla memoria: « *De rotatione corporum* » contengono altre notizie sulle quali vogliamo soffermarci.

Abbiamo già detto che un capitolo della Meccanica è dedicato alla esposizione dei risultati del Mozzi (2). Anche nella memoria già citata dell'Istituto di Bologna, il Frisi espone quasi testualmente (*Pars prior — De methodo equitis Julii Mozzii*, pp. 52-56) il metodo adoperato dal Mozzi per ottenere le cinque equazioni di cui parlammo nel nostro articolo; poscia, riprendendo quanto il Mozzi aveva fatto

(1) Così ad esem. la teoria degli assi liberi di rotazione (Cap. IV) non è molto rigorosa. La dimostrazione del teorema che si può far ruotare la coppia $x\,y$ in modo che $\Sigma m.xy=o$, è insufficiente (p. 194). Per mostrare che non può esistere, oltre i tre già trovati, un 4.° asse principale d'inerzia (coroll. III) l'A. dice che l'asse normale al 1.° e al 4.°, ecc. sarebbe pure principale in virtù del teorema VI, il quale però esige che i due assi siano ortogonali.

(2) Già assai prima il Frisi aveva esposto i risultati del *Discorso* in una lettera al Direttore delle *Novelle Letterarie* di Firenze per l'anno 1763 (Tom. 24, col. 451). Le stesse *Novelle* per l'anno 1764 (Tom. 25, N.° 28, 13 luglio, col. 445) recano la seguente notizia: « *È stata stampata qui* (Livorno) *recentemente un'operetta del* « *sig. conte Verri etc. ed un'altra del sig. Cav. Mozzi fiorentino, il quale è di* « *presente nel Regno di Napoli* ». Peraltro l'opera del Mozzi apparirebbe stampata in Napoli nella stamperia di Donato Campo. Circa al tempo delle ricerche del Mozzi, nella prefazione della Meccanica il Frisi dice: « *Mozzius in libro de* « *momentanea rotatione corporum, qui anno 1763 Neapoli prodiit, et jam usque* « *ab anno 1760 intra amicorum manus versabatur.....* »

Digitized by Google.

in un caso particolare, fa una semplice applicazione della teoria della composizione delle rotazioni alla ricerca, per altra via, delle stesse equazioni (*Pars altera — De nova ejusdem problematis solvendi methodo*, pp. 57-64).

La terza parte (*De methodo comitis Radicati*) è quella su cui vogliamo dire poche parole. Essa riguarda una dimostrazione della esistenza dei tre assi principali d'inerzia (o assi liberi di rotazione), fatti conoscere sin dal 1753 dal matematico Segner (1).

I maggiori contributi alla teoria dei momenti d'inerzia sono dovuti ad Euler, che sin dal 1759 era in possesso dei principali risultati, come già si è osservato. I principii poi per la ricerca di un asse libero di rotazione erano stati posti da d'Alembert nelle *Recherches sur la précession* etc., e poi nella seconda memoria del Vol. 1.° degli *Opuscules mathématiques*, in cui stabilisce due semplici equazioni necessarie per l'esistenza di un tale asse.

Lagrange, informato già delle ricerche di Euler, aveva pure osservato (2) che la ricerca degli assi liberi di rotazione è identica con quella di rette per le quali $\Sigma m x y = 0$, ecc.; tali rette sono ortogonali; ma Lagrange non ne dimostra l'esistenza.

Il primo a pubblicare una dimostrazione è stato J. A. Euler nella memoria già citata del 1761; ma non esitiamo un istante a ritenere che anche questa dimostrazione è del padre. Tale dimostrazione non è poi così *extrêmement compliquée*, come asserisce il d'Alembert (3), chè anzi è assai elegante, ma forse non troppo diretta poggiandosi sulle formule che dànno le componenti della velocità e dell'accelerazione di un punto qualunque del corpo. Esprimendo che le forze centrifughe che si vengono a originare per la rotazione intorno ad un certo asse si fanno equilibrio, Euler giunge a tre equazioni assai simmetriche (p. 30) contenenti i momenti e i prodotti d'inerzia e i coseni degli angoli dell'asse che si cerca; e da queste agevolmente ed elegantemente, assumendo per nuove incognite la longitudine e la latitudine η, si deduce una equazione di terzo grado in $\tan g\, \eta$; si ha dunque almeno un asse libero di rotazione reale. Gli altri due, se esistono, devono trovarsi in un piano normale all'asse già trovato e

(1) *Programma sistens specimen theoriae turbinum*. Halae 1753.
Alcune notizie su questo matematico ungherese (1704-1777) che fu professore a Gottinga, sono in un interessante articolo di S. Günther: « *Note sur Jean-André de Segner, fondateur de la météorologie mathématique* » (Boll. di Boncompagni, IX, pp. 217-228 (1878)). Vedasi inoltre: A. G. Greenhill: *The mathematical theory of the top considered historically* — Verhandlungen des dritten internationalen Mathematiker-Kongresses in Heidelberg, 1901.

(2) *Application de la méthode exposée dans le mémoire précédent à la solution de différents problèmes de dynamique* (Misc. Taurinensia, T. II, 1760-61; Oeuv. compl., vol. I, p. 426).

(3) *Opusc. mathém.*, tom. IV, p. 30.

Digitized by Google

la loro ricerca dipende dalla soluzione di una equazione di 2° grado che si stabilisce subito ed ha le radici sempre reali, ecc.

Ora, in sostanza, è questo il metodo seguito, salvo lievi modificazioni, da tutti coloro che si occuparono, in quel periodo, della stessa questione.

Nè molto dissimile è la dimostrazione di L. Euler nelle Memorie di Berlin pel 1758; egli si vale della *belle harmonie* o identità tra gli assi liberi di rotazione e quelli cui corrisponde il massimo o il minimo momento d'inerzia e giunge alla stessa equazione della precedente memoria adoperando gli stessi simboli.

Lagrange (1) si vale degli stessi concetti; ma conducendo un po' diversamente il calcolo fa dipendere il problema da un'equazione di sesto grado (con sole potenze pari e coll'ultimo termine negativo). La realtà degli altri due assi si dimostra come in Euler.

D'Alembert (2) parte dalle due equazioni stabilite nella memoria del 61; le trasforma rispetto ad una terna qualunque di assi ortogonali e giunge parimente ad un'equazione di terzo grado rispetto alla tangente della longitudine, e che, al modo solito, discute. Egli peraltro fa una minuta analisi di tutta la questione, dei casi d'indeterminazione, ecc.

Ma la più semplice equazione da cui dipende il problema, e che è poi la stessa famosa equazione per la ricerca degli assi di una quadrica, è dovuta a Lagrange (3), il quale ne dimostrò, per quanto ancora indirettamente, la realtà delle radici e per via algebrica.

Il Frisi nella memoria di cui ci occupiamo ci dà un altro particolare, finora forse ignorato, relativo alla storia di questa questione. Infatti nella introduzione a tale memoria egli scrive:

« Ignatius Radicatus Coconati Comes anno 1760, in Etruria cum « esset, demonstrationem theorematis effecit simplicissimam, et plura « corollaria elegantia, et tunc temporis nova adjecit ».

Nulla, che io sappia, il Radicati pubblicò sull'argomento (4); ma il Frisi ci ha conservato questa dimostrazione, che, sempre secondo il Frisi,

(1) *Recherches sur la libration de la lune.* Prix de l'Acad de Paris pour 1764. Oeuv. compl., vol. VI, pp. 5-61. Vedi specialmente pp. 21-24.

(2) *Recherches sur les axes de rotation d'un corps de figure quelconque, qui n'est animé par aucune force accélératrice.* Opus. mathém. Vol. IV, pp. 1-31 (1768).

(3) *Nouvelle solution du probleme du mouvement de rotation d'un corps de figure quelconque, qui n'est animé par aucune force accélératrice.* Nouveaux Mém. de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin, 1773. Oeuvr. compl., vol. III, p. 605.

(4) Radicati di Coconato è, autore di un'opera: *Mémoires analytiques par le comte R. de C.* (Riccardi, *Bibl. matem.*, col. 332), che comprende:

I. Observations analytiques sur l'équation

$$x^{l}(a+bx^{n})\,ddy+x(e+fx^{n})\,dx\,dy+(g+hx^{n})\,y\,dx^{2}=0$$

dans la quelle dx est supposé constant.

Digitized by Google

sarebbe la prima o una delle prime date. Ed è appunto la esposizione di essa che costituisce la terza parte della memoria del Frisi. E la dimostrazione, almeno in un punto, si allontana dalle altre. Infatti essa in sostanza si propone di mostrare che in un corpo vi ha sempre una terna di assi ortogonali siffatti che rispetto ad essi $\Sigma mxy = o$, ecc.; e per far questo il Radicati si vale del metodo della trasformazione delle coordinate o delle proiezioni in un modo oltre ogni dire semplice ed elegante.

Sia infatti x, y, z una terna ortogonale e si voglia esprimere che un nuovo asse X è principale. Sia OL la proiezione ortogonale di X sul piano xy e dicasi α l'angolo di OL e x; β quello di OL e X. Si scelga poscia Y normale al piano LOX e Z normale ad XZ. Posto, colle notazioni del Frisi o del Radicati, $n = \text{sen}\,\alpha$, $m = \cos\alpha$, $p = \text{sen}\,\beta$, $q = \cos\beta$, le formule per le trasformazioni ortogonali dirette dànno subito:

$$X = mqx + nqy + pz, \qquad Y = -nx + my,$$

$$Z = -mpx - npy + qz.$$

Basta quindi esprimere che, essendo μ l'elemento di massa,

$$\Sigma \mu XY = \Sigma \mu XZ = o,$$

e si trova, con facili eliminazioni, una equazione cubica in $\text{tang}\,\alpha$, identica a quella di Euler.

Benchè il Frisi abbia fatto conoscere assai tardi la dimostrazione del Radicati, quando egli doveva tener presente tutto ciò che già da un pezzo era stato scritto e pubblicato sull'argomento, non mi pare si debba revocare in dubbio (quantunque senza prove) ciò che egli asserisce (1).

* * *

Veniamo, dopo questa digressione, al Perelli. Di questo eruditissimo professore dello studio pisano (nato in Arezzo, 1704; morto ivi, 1783) non

II. Solution générale du problème, où il s'agit de trouver la nature des courbes, dont les tangentes coupent une courbe donnée sous des angles, dont la loi est connue.

III. Analyse de l'équation

$$dy\,d^2y + a\,ddy^2 + b\,dy^2ddy + c\,dy^4 = o.$$

A Milan MDCCLXXVI. Chez I. Galeazzi Imprimeur Libraire.

Avec approbation.

(1) Le dimostrazioni fondate sul metodo della trasformazione delle coordinate non furono nemmeno abbandonate dopo che Cauchy die' a tutta la teoria la massima eleganza e semplicità colla considerazione dell'ellissoide d'inerzia (Anc. Exer. 1827 — Oeuv. com. VII (2) p. 124). Vedasi ad esempio il *Traité de mécanique* del Poisson (2 vol. art. 389 — 2ème édition — 1833); col sussidio degli angoli euleriani si fa una dimostrazione ben più complicata di quella del Radicati.

Digitized by Google

possediamo scarse notizie. Si occupò di astronomia, geometria, meccanica, idraulica, di greco e di botanica. Il suo nome figura nel *Biographisch-Literarisches Handwörterbuch zur Geschichte der exacten Wissenschaften* — (Leipzig, 1863) del Poggendorff, il quale però non cita che i lavori di idraulica del Perelli. Nelle *Vitae italorum doctrina excellentium qui saeculis XVII e XVIII floruerunt*, del Fabroni, a più riprese e a lungo si parla del Perelli e anche del Frisi; nelle *Biografie degli italiani illustri nelle Scienze, Lettere ed Arti del secolo XVIII e de' contemporanei*, compilata da letterati italiani di ogni provincia e pubblicata per cura del prof. Emilio De Tipaldo — Venezia 1837 — e precisamente al Tom. IV, p. 149, è contenuta pure una biografia del Perelli; e finalmente il suo elogio fu scritto da Mons. Angelo Fabroni (1).

Il Perelli è anche citato con onore dal Montucla (2) e dal Lalande (3).

Che il Perelli si sia occupato della composizione dei moti di rotazione, con metodo diverso da quello del Frisi, non solo è detto dal Mozzi, ma dal Frisi stesso nella prefazione alla Meccanica:

« Clarissimus etiam Perellius qui tunc temporis in Pisana Academia « Astronomiae Professor erat, et quocum saepius de hisce omnibus « simul omnes colloquebamur, demonstrationem aliam theorematis « rotationum compositarum se invenisse dixerat, ac plura ad rotationis « motum spectantia eidem theoremati adjecisse ».

Nella biografia (nel De Tipaldo) si legge:

---

(1) *Memorie di Matematica e Fisica della Società Italiana*. Tomo 2.°, parte 1.ª, pp. XXXV-LIV. Verona 1784. Qui si riporta quanto G. Grandi diceva di lusinghiero del promettente allievo.

(2) *Histoire des sciences mathém.*, vol. III, part. 5, lib. 1, p. 10. « J'ai vu quelques morceaux de géométrie ancienne de M. Perelli, professeur de mathématique à Pise, par lesquels on peut juger qu'il connoissait très bien l'analyse ancienne ». Del Frisi e del Perelli, idraulici assai reputati e continuatori della gloriosa scuola italiana del CASTELLI e del GUGLIELMINI, doveva parlare il compianto R. CAVERNI nel tomo VII della sua poderosa *Storia del metodo sperimentale in Italia*, sventuratamente rimasta interrotta. (Vedi vol. I, p. 20 e 260).

(3) *Voyage en Italie etc.*, 3ème édition — Genève 1790, vol. II, p. 403. « Parmi les 42 professeurs de l'Université de Pise, il y en avait, en 1765, de très-distingués..... M. Perelli, de Bibbiena (?), ancien professeur d'astronomie, un des meilleurs mathématiciens de l'Italie; il était aussi docteur en médecine et savant dans le grec ». L'elenco però dei lavori non è completo. A titolo di curiosità citiamo anche il seguente passo:

« Les leçons publiques des professeurs de l'Université sont fort courtes, elles « ne durent guère qu'un quart d'heure, mais elles sont suivies d'une révision « qui se fait en particulier; il y a environ 70 leçons publiques par année; mais « les professeurs sont aussi obligés de faire chez eux des leçons particulières et « gratuites, dont le nombre n'est pas fixé. Il y a quelquefois des professeurs qui « profitent de leur crédit non seulement pour ne pas faire des leçons particulières; « *mais encore pour se dispenser des leçons publiques; cet abus est de tous les « pays: c'est aux ministres à y veiller* ».

Per buona ventura, almeno da noi, tale abuso è finito dovunque da un pezzo!

Digitized by Google

« I suoi scelti amici (si riferisce al Mozzi ed al Frisi) affermarono « ch' esso aveva sciolto vari difficili problemi di meccanica, in ispecie « sul moto di rotazione, i quali si sono smarriti per la poca cura « ch' egli ebbe sempre de' suoi scritti ».

Il Fabroni nel citato elogio scrive ancora: « Dopo ciò si volse ad « alcuni dei più difficili e dei più utili problemi meccanici, che se « fossero stati pubblicati nel loro tempo, avrebbero affrettati i pro- « gressi della Scienza a cui appartenevano, e ci farebbero conoscere « a qual segno era capace il Perelli di contribuire a questi pro- « gressi ».

Parmi certo che il Perelli non pubblicò dunque mai cose riguardanti la Meccanica e la composizione dei moti di rotazione. Anzi le sue pubblicazioni puramente matematiche (quelle cui certamente allude il Montucla) si riducono a due sole di cui non stimiamo inutile fare un breve cenno.

La prima ha per titolo: *Soluzione di un Problema geometrico* del Dottor Tommaso Perelli, Professore di Astronomia nell'Università di Pisa ([1]); contiene una soluzione in parte analitica, in parte geometrica della quistione di *trovare una curva* ABCD *dotata di tal proprietà che qualsivoglia raggio come* FB, *il quale partendo da un punto determinato* F *e s' incontra nel perimetro della medesima, dopo due riflessioni in* B *e* C, *sia obbligato a ripassare per lo stesso punto* F.

L' altra è in risposta ad un invito o disfida comparsa nelle *Novelle Letterarie* di Firenze del 1751 ([2]), ed è intitolata: *Soluzione d'alcuni Problemi geometrici* ([3]). Si tratta di otto quesiti, alcuni dei quali di massimi e minimi, assai interessanti.

1.° *Dato un mezzo cerchio come* BDEG *ritrovare il massimo rettangolo dell' ascissa* BD *nell' ordinata* DG, (BE è un diametro, G un punto del semicerchio, GD perpendicolare a BE). E un vecchio problema già risoluto da Torricelli anche pel caso più generale di un' ellissi ([4]); e la soluzione del Perelli è analoga a quella del Tor-

([1]) *Giornale dei Letterati d'Italia* — Volume per gli anni 1756 e 1757 (stampato in Roma nel 1758), pag. 65. Questo lavoro non è citato dal Riccardi.

([2]) Tomo XII, numero 33, (13 agosto 1751), col. 527-528. *Problemi geometrici, proposti da un Mattematico forestiere a' Geometrici Fiorentini, la cui soluzione si aspetta.*

([3]) *Novelle Letterarie* — Tomo XIV, 1755, col. 529. L'A. dà una soluzione di questi problemi, *assai facili e per la maggior parte triti,* prettamente geometrica, *secondo la gloriosa tradizione della scuola Toscana che vanta Vincenzo Viviani, il Grandi,* di cui l'A. si professa scolaro.

([4]) Vedi un lavoro dotto e interessantissimo di un mio venerato maestro, Davide Besso, troppo presto allontanatosi dall'insegnamento: « *Sopra un opuscolo di Michelangelo Ricci* ». Periodico di matematica per l'insegnamento secondario — Anno VIII, 1892, fascicolo I e II.

Digitized by Google

ricelli; si tratta in fondo della ricerca del massimo di $(a+x)^2(a-x)$. Si risolve pure il problema (2°) di determinare G in modo che BG + GD sia massima con la elegante considerazione di una parabola ausiliare.

Un terzo e ben più difficile problema è quello di *determinare fra tutti i coni retti inscrittibili in una stessa sfera, quello che ha la massima superficie, compresa la base.* La costruzione esattissima cui l'A. giunge con sole considerazioni di geometria è assai notevole se si riflette che analiticamente e per via elementare il problema non è facile. Si dimostra poi il teorema che se $x+y=a$, il prodotto $x^m y$ è massimo quando $x=my$ (m intero e positivo); teorema già noto anche in casi più generali (1) e di cui si fa applicazione alla ricerca del cono di massimo volume inscritto in una sfera. Un ultimo problema di massimo è questo: *dato un arco di cerchio* ABC *trovare un punto* B *tale che* AB + mBC *sia massimo.* Finalmente egli risolve il famoso problema del cerchio tangente a tre altri dati. L'A. ha la buona idea di considerare due dei centri di similitudine dei tre cerchi e dimostra che il centro del cerchio tangente si trova su di una retta fissa normale alla congiungente i centri suddetti: ma non va oltre, e dopo ciò riduce il problema a trovare i punti d'incontro di una retta con una iperbole di cui sono dati i fuochi, ecc. La costruzione del Perelli si avvicina in sostanza a quella ben nota di Newton (2).

Ad ogni modo il Perelli si mostra acuto e buon geometra, versato nei metodi della geometria antica e ciò fa invero deplorare che egli non abbia pubblicato le ricerche sulla composizione dei moti di rotazione.

***

Alla metà del secolo XVIII adunque, la teoria della composizione dei moti istantanei di rotazione, la scoperta dell'asse di moto elicoidale erano acquisite alla Scienza per opera di italiani. Se il contributo, nel secolo di d'Alembert, Euler, Lagrange, può sembrare molto modesto, esso però, per lo sviluppo successivo dei metodi geometrico-meccanici, non ci sembra certamente trascurabile.

R. Marcolongo.

(1) Besso l. c. § IV.

(2) *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (ediz. del 1723). Lib. 1.°, Lemma XVI, p. 63.

Digitized by Google

§

RECENSIONI ED ANNUNZI

P. DUHEM. — *Les origines de la statique.* T. I. Paris, Hermann, 1905, 8° gr., p. IV+360 [Prezzo Fr. 10].

Nella prefazione a questo suo volume l'Autore stesso ci informa delle circostanze alle quali è dovuto il suo carattere frammentario e la frequenza in esso di ripetizioni e di spostamenti. Il suo primo nucleo era costituito da uno studio mirante a porre in vista l'influenza degli scritti di Leonardo da Vinci su Girolamo Cardano e Giovanni Benedetti, per quanto riguarda i principî della Statica.

Ma, mentre appunto questo studio si andava pubblicando sotto forma di un articolo nella *Revue des questions scientifiques*, la lettura degli scritti di Niccolò Tartaglia portava a conoscenza dell'autore il fatto che la condizione d'equilibrio di una leva ad angolo e quella di un grave appoggiato a un piano inclinato si trovavano enunciate in un'opera attribuita a Giordano Nemorario, e non solo enunciate ma anche dedotte dal confronto di quelli che ora si chiamerebbero gli spostamenti virtuali dei due gravi.

Ciò indusse il Duhem a esaminare le relazioni sussistenti tra l'opera di Giordano Nemorario e gli scritti di Leonardo da Vinci, e questo esame lo portò a riguardare come probabile l'esistenza di un elaboratore intermediario — che egli in mancanza di altro mezzo di identificazione si contenta di chiamare il « *Precursore di Leonardo* » — al quale egli ritiene si debba attribuire la parte più importante delle aggiunte e correzioni che figurano nell'edizione che, della suddetta opera di Giordano Nemorario, fu pubblicata a Venezia da Curzio Troiano col titolo: *Jordani opusculum de ponderositate, Nicolai Tartaleae studio correctum novisque figuris auctum. Venetiis 1565.*

Che tali correzioni ed aggiunte non spettino in ogni modo al Tartaglia risulta dall'esistenza di un manoscritto della detta opera sotto il titolo *Liber Jordani de ratione ponderis* trovato appunto dal Duhem alla biblioteca Nazionale di Parigi (fond latin N.° 7378 *A*), nel quale esse già si riscontrano. È da notare che, nella celebre polemica tra il Tartaglia stesso e Ludovico Ferrari, Tartaglia è incolpato appunto di avere nel suo libro: « *Quesiti et inventioni diverse* » riprodotti dei brani di scritti di Giordano Nemorario senza citarne la fonte.

Digitized by Google

***

Tra le dimostrazioni più importanti che si trovano date nell'opera sopraindicata attribuita a Giordano Nemorario, è da porre quella della proposizione: che due pesi uguali, pendenti dagli estremi di una leva ad angolo, si fanno equilibrio quando i loro punti di sospensione si trovano ad eguale distanza dalla verticale passante per il fulcro. La dimostrazione consiste sostanzialmente nel far vedere che gli archi, che sarebbero contemporaneamente descritti dai due punti di sospensione dei gravi, per uno spostamento qualunque della leva dalla posizione che si vuol dimostrare essere di equilibrio, hanno proiezioni verticali differenti onde, dato che l'equilibrio non sussistesse, si avrebbe la conseguenza assurda che un peso abbassandosi di una data lunghezza solleverebbe un altro peso uguale a sè stesso per un tratto maggiore di quello di cui il primo è disceso.

Un analogo procedimento è applicato dal « *Precursore di Leonardo* » al caso più generale di pesi tra loro diversi, impiegando il principio che un peso che discenda da una data altezza non può sollevare un altro peso, eguale a un dato numero di volte sè stesso, se non a un'altezza di altrettanto più piccola di quella da cui il primo è disceso.

E questo stesso principio è pure applicato alla corretta determinazione dell'equilibrio di due gravi legati tra loro e appoggiati rispettivamente su due piani di diversa inclinazione.

Nell'attribuire, come fa il Duhem, al « *Precursore di Leonardo* » il merito di aver sostituito al confronto degli spostamenti virtuali (già considerati, come è noto, da Aristotele nelle « *Questioni meccaniche* », pel caso della leva a braccia orizzontali) quello delle proiezioni loro sulla direzione delle forze, e di aver quindi considerato, pel caso dei pesi, non le semplici velocità ma bensì gli innalzamenti e abbassamenti che a esse corrispondono, egli non tiene conto del fatto che considerazioni di genere affatto analogo si riscontrano applicate anche nell'opera, da lui pure citata, di *Erone (Barulcos)*, della quale è difficile escludere che qualche notizia diretta o indiretta non possa essere pervenuta a Giordano Nemorario o al suo continuatore: per quanto essa sia nota agli storici moderni della meccanica solamente per la traduzione recentemente eseguitane dal Carra de Vaux da un manoscritto arabo, conservato nella biblioteca di Leida.

In quest'opera di Erone, oltre al riconoscimento del principio dei momenti virtuali pel caso di ciascuna delle macchine semplici e pei meccanismi risultanti dalla loro combinazione, si riscontra l'applicazione del principio stesso, non solo alla deduzione delle condizioni di equilibrio del cuneo e della vite, ma anche alla risoluzione di un pro-

Digitized by Google

blema che si potrebbe chiamare di composizione delle forze: il problema cioè di determinare come varii lo sforzo occorrente per spostare dalla posizione verticale un filo da cui pende un grave, col cambiare il punto del filo sul quale si esercita la pressione, o la trazione a ciò occorrente.

***

Un concetto d'importanza fondamentale che compare nell'opera attribuita dal Duhem al « *Precursore di Leonardo* », e che anche negli scritti di Leonardo si trova appunto applicato alla soluzione di problemi di equilibrio, è quello della « *gravitas secundum situm* », o, come anche è detto, del « *peso accidentale* ».

Un grave che sia assoggettato a dati legami o impedimenti al moto (per esempio che sia posto su un piano inclinato o immerso in un liquido) e la cui caduta possa quindi venire impedita da uno sforzo inferiore a quello che il suo peso rappresenta, è detto da Giordano Nemorario, avere un « *peso accidentale* » uguale a tale sforzo, o più precisamente uguale al minimo sforzo che occorrerebbe applicargli per sostenerlo nelle condizioni in cui si trova.

L'introduzione di tale concetto, corrispondente a quello che dai meccanici greci era indicato colla parola ῥοπή, e a quello che più tardi è indicato da Stevin col nome di *Sacoma* o « *peso apparente* », permette a Giordano Nemorario l'enunciazione della proposizione di fondamentale importanza: che se due corpi di egual peso si trovano in condizioni da avere durante tutto il loro moto una diversa « *gravitas secundum situm* », le velocità che essi assumono in uno stesso intervallo di tempo cadendo, sono proporzionali alle rispettive « *gravitates secundum situm* ». È il caso per esempio di due gravi di peso uguale che rotolino su due piani di diversa inclinazione.

Il Duhem, mosso a ciò evidentemente dal desiderio di dare un più grande rilievo all'influenza della scuola peripatetica sullo sviluppo della statica, tenta identificare la proposizione suddetta con l'altra, affatto distinta, che si trova enunciata pure da Aristotele (nel *De Caelo*), riguardante invece il diverso comportarsi di due corpi, di peso differente, sotto l'azione di una stessa forza:

« *Se due corpi di diverso peso sono soggetti a una stessa forza motrice* (δύναμις κινοῦσα) *i tratti che essi percorrono in uno stesso intervallo di tempo sono inversamente proporzionali ai loro rispettivi pesi* » (Aristoteles, *De Coelo*, III, 2).

Non mi riesce poi di spiegarmi come quest'ultima proposizione, contenente in certo modo il germe del concetto moderno di *massa*, venga qualificata invece dal Duhem come « *une erreur grave* », per rigettare il quale « *il a fallu à la science deux mille ans de medi-*

Digitized by Google

tations conduites par les plus grands esprits qui se soient succedé d'Aristote à Galilée » (pag. 6).

Meno ancora poi mi pare che l'una o l'altra delle suddette due proposizioni abbiano un rapporto qualsiasi coll'altra, non meno importante, enunciata da Aristotele nello scritto già accennato sulle *Questioni meccaniche*, colla proposizione cioè asserente che l'equilibrio di due forze applicate agli estremi d'una leva dipende dalla circostanza che, per un dàto spostamento della leva stessa, i suoi estremi descrivono archi inversamente proporzionali alle forze che vi sono applicate.

L'unico tratto comune tra questa proposizione e l'altra precedentemente citata consiste nel fatto che in ciascuna di esse si afferma l'esistenza di una proporzionalità inversa tra due pesi (o forze) e due velocità. Ma questo tratto comune è ben poco significante di fronte alle differenze che sussistono tra l'una e l'altra pel fatto che, nella prima, le velocità di cui si tratta sono quelle che *assumono* effettivamente, in uno stesso tempo, due gravi di peso diverso (o come ora si direbbe di diversa *massa*) *sotto l'azione di una medesima forza* (ad esempio due sfere di diverso peso spinte su un piano orizzontale); nel secondo invece sono le velocità che *assumerebbero* due gravi, o i punti di applicazione di due forze, che si facciano equilibrio in un dato meccanismo quando questo venisse a essere spostato dalla posizione per la quale l'equilibrio sussiste.

Le due affermazioni non possono quindi essere identificate l'una all'altra senza che ambedue vengano private della parte più essenziale del loro significato.

***

La distinzione che il Duhem riconosce tra i due indirizzi di speculazione sui principii della statica, procedenti il primo in base alla considerazione delle varie velocità o spostamenti compatibili delle diverse parti dei meccanismi di cui si tratta, il secondo invece in base alla sostituzione di varii sistemi di pesi o di forze con altri equivalenti secondo il metodo impiegato da Archimede nel suo scritto sui « *Piani equiponderanti* », non mi pare sia esattamente caratterizzata col qualificare il primo come facente appello in particolar modo all'intuizione.

Al contrario, mentre i postulati dai quali parte Archimede sono scelti in modo da soddisfare al massimo grado le esigenze di evidenza intuitiva propria alle proposizioni fondamentali della geometria, il riconnettere invece, come fa Aristotele, l'aumento di efficacia d'una forza, il cui punto d'applicazione si vada allontanando dal centro di rotazione d'una leva, all'altro fatto della crescente velocità che *assumerebbero* i rispettivi punti d'applicazione se la leva si spostasse dalla sua posi-

Digitized by Google

zione d'equilibrio, costituisce così poco un appello all'intuizione (in quanto questa si distingue dall'osservazione e dall'esperimento) che si presenta al contrario come un vero paradosso. In tale asserzione, come appunto fu osservato da Stevin, dei movimenti che *succederebbero*, e che quindi *non succedono* sono qualificati come cause di un equilibrio che sussiste appunto solo perchè, e fintantochè, essi non succedono.

È a questo procedimento assai più che a quello seguito da Archimede che il Duhem avrebbe potuto muovere il rimprovero di darci piuttosto cognizione del *quando* che non del *perchè* l'equilibrio sussista, e di indicarci piuttosto i *sintomi* che non le *cause* o le circostanze (pressioni, tensioni, contrasti) da cui esso effettivamente dipende.

***

L'opinione espressa dal Duhem sulla parte preponderante che avrebbero avuto le considerazioni di Aristotele sugli spostamenti virtuali nella scoperta della legge della composizione di due forze applicate a un punto, mi pare risenta anch'essa troppo l'influenza della sua preoccupazione di attribuire il massimo rilievo possibile alla tradizione peripetetica, da lui identificata coll'impiego di tali considerazioni.

Non vedo infatti in qual senso si possano riguardare come basate o suggerite dal concetto di « spostamenti virtuali » le considerazioni applicate da Leonardo da Vinci alla soluzione di tale problema, considerazioni che consistono nel paragonare tra loro quelli che egli chiamava i « bracci potenziali » delle forze, cioè la distanza della loro linea d'azione da un punto intorno a cui ruoti un'asta passante pel loro punto d'incontro.

E meno ancora mi pare si possano riscontrare tracce dell'influenza delle dottrine aristoteliche nel procedimento seguito dallo Stevin per arrivare alla scoperta di questa stessa legge: procedimento basato, com'è noto, sulla determinazione delle condizioni di equilibrio di un grave su un piano inclinato, da lui ottenute ricorrendo alla considerazione di una collana costituita di pesi uguali ed equidistanti scorrevole lungo i lati di un triangolo.

Anche ammettendo che, a suggerire a Stevin questo suo modo ingegnoso di risolvere la questione dell'equilibrio d'un grave su un piano inclinato, possano aver avuto parte le considerazioni di Cardano sull'impossibilità del moto perpetuo, non ne seguirebbe affatto, come vorrebbe il Duhem, la dipendenza della scoperta della legge in questione dalla considerazione dei rapporti tra le forze e gli spostamenti virtuali dei loro punti di applicazione.

Che le considerazioni di Cardano, e quelle anteriori di Giordano Nemorario e del suo ignoto continuatore, sull'impossibilità di sollevare

Digitized by Google

mediante la caduta d'un peso, altri pesi a un'altezza complessiva superiore a quella di cui il peso movente si è abbassato, siano ben più intimamente connesse, per l'indole e pel contenuto, alla trattazione d'Archimede, è confermato anche dalla forma che assunse più tardi la prima enunciazione precisa del principio meccanico che in esse è quasi presentito, col principio, formulato da Torricelli: che, *quando più pesi sono applicati a uno stesso meccanismo, la condizione necessaria e sufficiente perchè questo non si muova è che, tra gli spostamenti che il meccanismo permette, non ve ne sia alcuno pel quale il comune centro di gravità di tali pesi subisca un abbassamento.* (TORRICELLI: *De motu gravium*, in *Opera geometrica*. Firenze, 1644).

G. VAILATI.

J. THOMAE. — *Sammlung von Formeln und Sätzen aus dem Gebiete der elliptischen Funktionen, nebst Anwendungen.* Leipzig, B. G. Teubner, 1905, 4°, p. 44, [Prezzo del vol. leg. Mk. 2,80].

Niuno ignora come il Weiertrass abbia ricostruito su basi novelle la disciplina delle funzioni ellittiche e come un suo illustre discepolo, lo Schwarz, abbia diffuso in tutto il mondo la conoscenza della nuova teoria con una raccolta di formole, la quale, benchè tuttora incompleta, ha prestato e tuttora presta ottimi servigi. Ora il Thomae, agli occhi del quale la superiorità del sistema Weierstrass su quello Legendre-Jacobi non appare indiscutibile, si è proposto ed è riuscito nel libro che annunciamo di offrire agli studiosi una raccolta analoga, contenente l'essenza dei *Fondamenta nova* e delle aggiunte che ci apportarono gli immediati discepoli di Jacobi. Saggiamente egli aggiunse un compendio delle più interessanti applicazioni che ricevette la teoria delle funzioni Jacobiane: cioè problemi sul pendolo, rettificazione dell'elisse e della lemniscata, ellisse sferica, poligoni di Poncelet, rappresentazioni, superficie minime di Schwarz, corda vibrante, geodetiche, cubiche piane. Crediamo non allontanarci dal vero prevedendo che all'utile lavoro del Thomae verrà accordato un posto nella biblioteca di ogni matematico, accanto alla raccolta congenere dello Schwarz.

G. L.

R. FRICKE. — *Hauptsätze der Differential-und Integralrechnung als Leitfaden zum Gebrauch bei Vorlesungen zusammengestellt.* 4. Aufl. Braunschweig, F. Vieweg u. Sohn, 1905, 8°, p. XV+217, [Prezzo Mk. 5; legato Mk. 5,80].

Cf. *Bollettino*, T. VI, 1903, pagg. 14-15.

« *Prefazione.* — La IV edizione di questa mia guida differisce

Digitized by Google

dalla II, prescindendo da un gran numero di cambiamenti stilistici, per due modificazioni più essenziali concernenti in parte la spiegazione di concetti ed in parte l'andamento di dimostrazioni. Mi lusingo che tali cambiamenti verranno giudicati come miglioramen t e che il mio libro, anche nella sua quarta forma, saprà aggiungere dei nuovi ai suoi antichi amici ».

C. ARZELÀ. — *Trattato di algebra elementare ad uso dei Licei e degli Istituti tecnici.* Terza edizione completamente rifatta. Firenze, Successori Le Monnier, 1905, 8°, p. XI + 495, [Prezzo L. 3,50].

Il concetto che principalmente informa questa terza edizione è quello stesso che è servito di base all'A. nelle edizioni precedenti, delle quali è pertanto conservata la disposizione della materia, disposizione che ha per iscopo di condurre l'alunno allo studio dei numeri irrazionali solo quando egli, già addestrato in quella parte dell'Algebra, in cui si fa uso dei numeri interi e frazionari, fatto più maturo di mente, meglio può essere in grado di affrontarne le difficoltà. Il libro comprende quindi due parti nettamente distinte, la parte razionale, per esprimermi coll'A., e la parte irrazionale, in ciascuna delle quali gli argomenti si succedono con ordine logico, rigoroso, e l'estensione ad essi data è giustamente proporzionata alla loro importanza.

Senza entrare su ciò in troppi particolari, è qui soltanto il caso di accennare, a pochi o a nessuno potendo essere sconosciute le edizioni precedenti, alle principali aggiunte e modificazioni che a queste sono state fatte: le aggiunte consistono nella teoria dei logaritmi, dedotta da quella delle progressioni e nella formola del binomio, per la quale vengono dati alcuni teoremi del calcolo combinatorio; le modificazioni rignardano i numeri positivi e negativi, la moltiplicazione algebrica, i numeri irrazionali, la funzione esponenziale, i numeri complessi. Con queste modificazioni molti miglioramenti sono stati portati nel libro specialmente dal punto di vista didattico, avendo l'A. abbandonato quelle parti, che più potevano offrire difficoltà, anche quando erano, come nel caso della moltiplicazione algebrica, assai notevoli e geniali.

Merita di essere notato il modo, con cui il concetto di numero viene successivamente esteso, mediante l'introduzione dei numeri relativi, dei numeri irrazionali e dei numeri complessi.

Se da una parte è preferibile, per un indirizzo algebrico puro, porre via via tale concetto come ente analitico, dimostrandone l'utilità col togliere casi d'impossibilità e col generalizzare formole fondamentali, d'altra parte non si può negare che più semplice quello si presenta alla mente dei giovani, quando viene dato come rappresentazione di

Digitized by Google

grandezze concrete. Maggiore semplicità non ne deriva peraltro a questo modo nello svolgimento della teoria.

A siffatti concetti l'A. dimostra di essersi ispirato, scegliendo, come ha fatto, un indirizzo eclettico, che, per quanto ho ora detto, a me sembra opportuno. Egli premette infatti, nei rispettivi casi, considerazioni sulle grandezze, che consentono di essere contate in due versi opposti, sulle grandezze commensurabili ed incommensurabili e sui vettori, considerazioni che giustificano, nel riguardo di un possibile significato concreto, le convenzioni che vengono dopo, al tempo stesso che ne dimostrano maggiormente l'opportunità; ma queste convenzioni, come pure lo studio dei nuovi numeri, sono poi fatte indipendentemente da tutto ciò.

Alle modificazioni sopra dette e ad altre minori s'aggiungono inoltre frequenti mutamenti di forma, pei quali l'esposizione procede sempre, più che mai, semplice e sobria, e facile riesce la lettura.

Il libro non segue passo passo gli attuali programmi ministeriali; esso può nondimeno, sol che si sposti o muti quà e là poche cose, come lo stesso A. avverte, servire egualmente allo svolgimento dei medesimi.

CARLO SEVERINI.

R. GANS. — *Einführung in die Vektoranalysis, mit Anwendungen auf die mathematische Physik.* Mit 31 Figuren im Text. Leipzig, Teubner, 1905, 8°, p. X+28, [Prezzo del vol. leg. Mk. 2,80].

L'analisi vettoriale, o calcolo geometrico, che sinora incontrò fra i matematici puri limitato favore, annovera fra i cultori della fisica molti estimatori; fra i più entusiasti di questi va collocato l'A. dell'opuscolo che annunciamo. Egli, ritenendo essenziale per l'avvenire della fisica che tutti possano intendere le applicazioni di quel metodo ed essere in grado di accrescerle, ne architettò una esposizione succinta, ma intelligibile a chiunque disponga di una discreta cultura matematica. Il piano ed i confini del suo lavoro emergono dai titoli dei quattro capitoli che lo compongono: I. Le operazioni fondamentali dell'analisi vettoriale. II. Operazioni differenziali e teoremi integrali III. Coordinate curvilinee. Decomposizioni di vettori. Deformazioni meccaniche. IV. Applicazioni all'idrodinamica ed all'elettrodinamica.

G. L.

Digitized by Google

A. FURHMANN. — *Aufgaben aus der analytischen Mechanik. I. Teil. Aufgaben aus der analytischen Statik fester Koerper.* 3. Auflage. Leipzig, Teubner, 1904, 8°, p. VII+208, [Prezzo del vol. legato Mk. 3,60].

« Se per acquistare una profonda cognizione di una lingua straniera è indispensabile, non solo di intendere quanto è scritto o pronunziato, ma anche di sapere parlare tale lingua, si può asserire con tanta maggiore ragione del linguaggio delle scienze esatte, che esso deve essere, non soltanto appreso, ma anche applicato ». Con tali saggie parole O. Schlomilch preludeva nel 1867 alla I ed. dell'opera di chi era allora suo assistente. Tale opera si mostrò all'atto pratico capace di conseguire il fine didattico che si era proposto; e l'A., per confermare il fervore di cui il pubblico gli fu largo, la migliorò e completò nei particolari pure lasciandone intatto il piano generale.

Gli argomenti a cui si riferiscono i problemi trattati nel volume che oggi annunciamo sono:

Calcoli di masse e pesi. Problemi sull'equilibrio di un punto libero. Problemi sull'equilibrio di un punto vincolato. Baricentri. Equilibrio di un sistema di forza. Applicazioni del principio delle velocità virtuali. Attrazioni.

G. L.

H. GRASSMANN. — *Gesammelte mathematische und physikalische Werke.* II. Band, I. Teil. Mit 45 Figuren im Text. Leipzig, Teubner, 1904, 8° gr., p. V+451, [Mk. 16].

Questo nuovo volume di un'edizione già nota ai nostri lettori (v. *Bollettino*, T. VI, 1903, pag. 89) abbraccia, non soltanto tutte le memorie di geometria ed analisi pubblicate da Grassmann, ma anche i primi sette paragrafi del *Lehrbuch der Arithmetik* (1861) ed il paragrafo 8° del *Lehrbuch der sphärischen Trigonometrie* 1865; questa scelta è giustificata dalle doti di originalità che posseggono tali brani delle citate opere didattiche del grande geometra tedesco. Un accuratissimo indice per materie (tutto fatica dell' Engel) rende facile la ricerca di quanto può interessare. Ma vanno ancora rilevate con somma lode le note destinate a mettere in luce i meriti più o meno grandi delle varie produzioni grassmanniane; attiriamo specialmente l'attenzione dei lettori sul passo in cui viene rivendicato a Grassmann il metodo di generazione di tutte le curve piane algebriche mediante fasci projettivi, per solito attribuito a Chasles e Jonquière e su

Digitized by Google

quelli ove è dimostrato vano il tentativo da lui fatto per fare apparire i quaternioni e le teorie delle forme algebriche come derivazioni dell'*Ausdehnungslehre*.

G. L.

P. APPELL ET J. CHAPPUIS. — *Leçons de mécanique élémentaire à l'usage des élèves des classes de première (latin-sciences ou sciences-langues vivantes) conformément aux programmes du 31 mai 1902*. Paris, Gauthier-Villars, 1903, p. VIII + 190, [Prezzo fr. 2,75].

P. APPELL ET J. CHAPPUIS. — *Leçons de mécanique élémentaire à l'usage des élèves des classes de mathématique A et B, conformément aux programmes du 31 mai 1902*. Paris 1905, Gauthier-Villars, p. 306, [Prezzo fr. 4].

I programmi del maggio 1902 hanno iniziato in Francia quella riforma dell'insegnamento scientifico nelle scuole classiche, che è vivamente desiderata presso di noi, ma ancora ben lontana, e sulla quale il Prof. Loria espose ultimamente delle idee che pienamente approviamo (1). E poichè non basta fare i soli programmi, una eletta schiera di scienziati, tra i migliori che vanti la Francia, non ha disdegnato venir in aiuto a professori e ad alunni, sviluppando, sotto la direzione del Darboux nei *Cours de mathématiques élémentaires* quanto richieggono i nuovi programmi. Citiamo ancora le *Notions de mathématique* e le *Notions historiques* di J. e P. Tannery in cui sono felicemente esposte le più elementari nozioni del calcolo differenziale ed integrale arditamente introdotte nel programma degli studii secondari (cfr. *Bollettino*, T. VII, 1904, p. 80-82).

Al maggior sviluppo dato all'insegnamento della Cinematica e della Meccanica nelle prime classi liceali A e B (latino-scienze o scienze-lingue viventi) dobbiamo i due eleganti volumetti che l'illustre Prof. Appell ha pubblicati in collaborazione col Prof. Chappuis.

Noi ci proponiamo appunto di farli in breve conoscere e di raccomandarli vivamente agli insegnanti di fisica dei nostri licei.

Assai opportunamente gli autori premettono, nel primo volumetto, la trattazione, con metodo quasi esclusivamente geometrico, di tutte le indispensabili nozioni sulle proiezioni, sulle coordinate, sulla teoria dei vettori che frequentemente saranno richiamate in tutto il corso.

La Cinematica, cui è dedicata la parte più notevole del libro, consta di quattro parti; nella prima sono fissate minutamente le nozioni di

(1) Programmi del passato e programmi per l'avvenire « Bollettino dell'Associazione Mathesis pel 1905 ».

Digitized by Google

moto e di tempo, e, con qualche anticipazione, viene data, senza dimostrazioni naturalmente, la teoria del pendolo semplice e composto. Ci sia permesso qui di notare che gli autori, che pur in tutti i due volumetti hanno quasi sempre evitato i richiami storici e i nomi dei grandi geometri legati indissolubilmente alle scoperte loro, attribuiscono ad Huyghens senz' altro (pag. 66) il merito di aver *per il primo* applicato il pendolo alla regolarizzazione degli orologi, senza neppur far il nome del Galileo, i cui diritti a quella invenzione sono oramai fuori di dubbio.

Le teorie introduttorie, il concetto di derivata di cui gli autori possono valersi, perchè gia noto allo studente, fanno acquistare, lo si comprende facilmente, una insolita semplicità ed eleganza alla esposizione della cinematica del punto (Parte II); ed è ben giusto osservare che gli autori non fanno abuso di considerazioni troppo analitiche: anzi tale esposizione, col sussidio dell' odografo pel concetto di accelerazione, con quello di opportuni diagrammi assume una veste geometrica semplice e chiara, che i numerosi esercizi, le applicazioni svariate, fra cui notevole quella del moto armonico, rendono anche attraente.

La III Parte, cinematica dei sistemi rigidi, si riduce in fondo allo studio particolareggiato ed elementare del movimento di traslazione, di rotazione semplice ed elicoidale, seguito da un breve cenno sui modi di realizzare in pratica questi movimenti e che assai opportunamente viene a mitigare quel tanto di astratto che presenta la teoria. Ma non sarebbe qui stato opportuno, facendo magari uno strappo alle esigenze dei programmi, accennare al teorema fondamentale di tutta la teoria e che si può dire la riassume nel modo più chiaro ed intuitivo? La considerazione dei movimenti relativi e la regola per la composizione delle velocità considerata in vari e notevoli casi particolari costituiscono la IV ed ultima Parte del libriccino; al quale non manca una piccola raccolta di esercizi proposti e di esempi numerici con le risposte e un cenno di soluzione.

Il secondo volumetto sviluppa il programma per le classi di matematiche speciali. La I Parte è un complemento alle nozioni di Cinematica svolte nel primo volume; e riflette lo studio del moto epicicloidale, la composizione delle rotazioni istantanee intorno ad assi paralleli e le applicazioni agli ingranaggi cilindrici; lo studio geometrico e particolareggiato di alcuni sistemi articolati e di alcuni inversori.

La II Parte che gli autori intitolano Meccanica (e non si comprende bene il perchè) è sostanzialmente dedicata alla statica dei sistemi invariabili.

È ben noto quanto sia difficile la esposizione chiara e rigorosa dei principii della meccanica classica anche nei corsi superiori; gli autori

Digitized by Google

hanno quindi dovuto sorvolare su più di una difficoltà e il modo assai spiccio di definire la forza come il prodotto dell'accelerazione per la massa (che non vien definita) presenta vantaggi e svantaggi non pochi e da luogo a non piccole obiezioni. In questo punto noi crediamo che l'esposizione degli autori sia un po' troppo sommaria. Lo sviluppo della statica è del resto assai ampio e poco o nulla sarebbe da aggiungere riguardo alla composizione dei sistemi di forze, all'equilibrio di un corpo rigido libero o vincolato, ai centri di gravità, allo studio delle macchine semplici. Ancor qui l'esposizione, condotta con metodo geometrico, è variamente alternata da esercizi e da applicazioni numerose.

La dinamica, II Parte, si riduce naturalmente a poco e cioè alle equazioni del moto di un punto libero colle applicazioni al moto rettilineo e curvilineo dei gravi nel vuoto; al concetto di lavoro; al teorema delle forze vive per un punto libero o vincolato e per un sistema di punti; allo studio (non completo però) del pendolo semplice, e finalmente ad alcune brevi nozioni sulle macchine.

Forse il concetto, giustissimo sotto molti punti di vista, di non oltrepassare di troppo i limiti imposti dai programmi, non ha permesso agli autori di dedurre dalle teorie esposte, con considerazioni elementari, quanto si sarebbe potuto. Qualche lacuna si sarebbe evitata facilmente; ad esempio non si trova la dimostrazione della formula classica del pendolo (pag. 263), senza dire che considerazioni del tutto elementari permetterebbero financo la trattazione del problema più complicato del moto di un grave su di una cicloide; avrei ritenuto necessario un maggior sviluppo del principio dei lavori virtuali (§ 96), che, almeno nei casi più semplici, può esser dimostrato con considerazioni intuitive.

Nè, forse, in un libro elementare, avrebbero fatta cattiva figura alcune semplici e purtroppo trascurate dimostrazioni di cui abbondano i libri classici; basti citare le più famose sull'equilibrio della leva retta o angolare, sull'equilibrio di un grave su di un piano inclinato.

Ma queste lacune nulla tolgono alla bontà dei due libretti. Ci auguriamo che, in un prossimo avvenire, essi portino alle nostre scuole quei frutti che indubbiamente arrecheranno alle scuole francesi.

ROBERTO MARCOLONGO.

G. LECHALAS. — *Introduction à la géométrie générale.* Paris, Gauthier-Villars, 1904, 8° picc., p. IX+58, [Prezzo fr. 1,75].

Estratto dalla Prefazione

« Ciò che noi ci proponiamo di fare è semplicemente di presentare sopratutto a quelli che non si sono ancora formati un concetto siste-

Digitized by Google

matico delle tre geometrie, un *aperçu* che permetterà loro di intraprendere poi lo studio dei trattati sulla materia, senza lasciarsi soggiogare da concetti filosofici che non hanno nulla di necessario ».

Indice. Cap. I. Geometria euclidea a 1, 2 o 3 dimensioni. § I. Simmetria ed invertibilità. § II. Geometria sferica. § III. Generalizzazione della nozione di curvatura. Cap. II. Geometria euclidea a 4 dimensioni. § I. Libro V della geometria a 4 dimensioni. § II. Sfere a tre dimensioni. Cap. III. Geometria degli spazi a curvatura negativa.

I. FISHER. — *Kurze Einleitung in die Differential-und Integralrechnung (« Infinitesimalrechung »), übersetzt von* N. PINKUS. Mit 11 Figuren im Text. Leipzig, B. G. Teubner, 1904, 8°, p. VI+72, [Prezzo del vol. leg. Mk. 1,80].

Questo interessante libricino venne scritto dall'A. (che è professore di economia politica nell'Università Yale) nell'intento di rendere intelligibili anche ai non matematici i *Principes mathématiques de la theorie des richesses* del Cournot. Esso però riuscirà sommamente giovevole a tutti coloro che intendono impadronirsi sollecitamente dei principi del calcolo infinitesimale; e chi sa quanto vaste ed importanti siano tali applicazioni riconoscerà essere estremamente ampia la sfera di influenza dello scritto che annunciamo. Del quale ecco, per finire, il contenuto:

I. Metodi generali di differenziazione II. Teoremi generali sulla differenziazione. III. Derivata dalla funzione elementare. IV. Derivata successiva. Massimi e minimi. V. Il teorema di Taylor. VI. Calcolo integrale. *Appendice:* Funzioni di più variabili.

G. L.

K. T. VAHLEN. — *Abstrakte Geometrie. Untersuchungen über die Grundlagen der euklidischen Geometrie.* Mit zahlreichen Figuren im Text. Leipzig, Teubner, 1905, 8°, p. XI + 302, [Prezzo del vol. leg. Mk. 12].

Nell'opera presente l'A. si è proposto di esporre in modo compendioso, ma completo, i fondamenti della geometria, secondo i metodi che vennero di recente escogitati in Germania ed in Italia. Il volume consta di cinque Sezioni. Nella I vengono esposti i fondamenti dell'aritmetica, nella misura richiesta da ciò che segue. Nelle Sez. II e III segue la geometria projettiva; con maggiore precisione, basandosi sopra gli assiomi (Verknüpfungsaxiome) di Staudt e la supposizione che sussista il teorema di Pascal, vengono dedotte le proposizioni fondamentali della geometria di posizione. Poi, nella Sez. III, dopo

Digitized by Google

avere introdotto l'assioma della continuità ed i così detti « Anordnungsaxiome », viene dimostrato il teorema di Pascal. La Sez. IV è intitolata « Geometria affine ». Ivi si desiste dall'ammettere generalmente vero l'assioma: « due rette si tagliano in un punto », ed in base a nuovi assiomi viene stabilita tanto la geometria affine euclidea, quanto la geometria di Bolyai, sotto veste projettiva. La V Sez. ha per titolo « Geometria metrica » e svolge, in base agli assiomi consueti, la geometria euclidea e le due non-euclidee. In ogni caso vengono ampiamente svolte le questioni concernenti la dipendenza od indipendenza dei varii assiomi fra di loro, nonchè quelle della deducibilità di teoremi da assiomi.

Scendiamo a particolari più minuti. L'A. comincia con la definizione di insiemi ordinati. Dopo la definizione dell'ordinamento lineare vien definito un insieme ordinato ciclicamente come un insieme tale che « mediante una duplice posizione di un elemento qualunque a (siano a' e a'' i due elementi così nascenti) abbia origine un insieme linearmente ordinato, in cui ogni elemento b cade fra a' e a'' ». Questa definizione ci sembra non molto comprensibile: infatti da quali relazioni fondamentali « nascono » propriamente quelle nuove relazioni? Con la definizione analoga, che definisce l'ordinamento sferico coll'aiuto dell'ordinamento planare anteriormente definito (p. II), essa concorda; soltanto essa è direttamente inesatta, perchè l'insieme « nascente » mediante posizione non deve essere linearmente, ma ciclicamente ordinato. Nel § 19 sono definiti gli insiemi continui nel modo seguente:

« Un insieme linearmente ordinato dicesi *continuo*, quando ad ogni sistema compatibile con il (postulato) 10 di relazioni ordinali non tutte omogenee di una cosa a tutte le altre cose di un gruppo parziale corrisponde almeno una cosa x dell'insieme ».

L'assioma 10 dice: « Da a prima di x, x non dopo di b, segue a prima di b », e similmente riguardo alla relazione « dopo ». L'A. dice in nota che « Tale continuità è differente da quella di Dedekind ». Certamente, ma secondo la definizione dell'A. non esiste alcun insieme « continuo ». Per es. il « continuo lineare » non è un insieme « continuo », perchè nessun elemento corrisponde al sistema di relazioni ordinali: $x > 0$ e $<$ di qualsia numero razionale; e queste relazioni ordinali non implicano alcuna contraddizione (giacchè tali grandezze esistono ad es. nel sistema di numeri non-archimedei). Se poi si considera come più innanzi nel libro (p. 61 e seg.) da tale specie di continuità venga dedotta l'esistenza di radici quadrate ecc. nei sistemi di numeri, si vede essere probabilissimo che ci si trovi in presenza di una brutta forma del principio di Dedekind (« Schnittprincip »). Comunque da tale circostanza vengono rese senza valore altre osservazioni intorno al legame dell'assioma di continuità con le leggi di collegamento

Digitized by Google

(« Verknüpfung ») e con la continuità, p. es. quella sulla esistenza di geometrie « continue » non-pascaliane (Hilbertiane) (133) ed anche non-archimedee. Segue poi la definizione di « gruppo » come insieme dotato di « composizione » e di « sistema numerale » come gruppo con due specie di composizioni, fra loro collegate dalla legge distributiva. A questo punto viene stabilita la legge associativa, la legge binaria (inesistenza di divisori dello zero) e la commutatività della moltiplicazione. Segue l'introduzione dei numeri razionali, reali ed immaginari, con applicazioni. Dal concetto di sistema di numeri viene dedotto quello di « sistema di grandezze ». Il § 152 dice: « *Teorema:* Un sistema di numeri S contenente i è un sistema numerico immaginario, cioè non contiene che numeri della forma $a + b\,i$, ove a, b sono grandezze di un sistema reale ». In nota si legge: « Questa proposizione dice più della corrispondente di Weierstrass, giacchè... ». Ma la dimostrazione di questo teorema riuscì pel sottoscritto affatto inintelligibile. La Sez. in discorso termina col § 155: « I postulati... costituiscono un sistema completo pel sistema di numeri reali o risp. immaginari, cioè tutte le proprietà di questi sistemi possono dedursi da quegli postulati ». Ora se s'intende per « proprietà » « proprietà matematica » quanto precede altro non è che una definizione di aritmetica, ma ad ogni modo non è certo un teorema. Ciò non ostante l'A. ne dà una dimostrazione, che riesce necessariamente illusoria.

In principio della II Sez. l'A. dichiara che come unico concetto fondamentale verrà introdotto il punto, ma in fatto ciò solo in apparenza. Segue anzi (§ 4) la definizione: « Se A e B sono due punti distinti qualunque, tutti i punti esistenti A e B compresi, si dividono in due classi $(AB)_0 = (BA)_0$ e $(AB)_1 = (BA)_1$, ecc.... La totalità dei punti della classe $(AB)_0$ dicesi « retta » [AB]. « È chiaro essere ciò errato; si doveva dire invece: *Teorema:* Esistono classi $(AB)_0$ e (AB) aventi queste e queste proprietà. *Definizione:* Chiameremo tali classi cose di I specie. *Postulato:* Fra le cose di I specie vi è un sistema di cose, che chiameremo *retta*, dotato delle seguenti proprietà:... Ma naturalmente non si può qui discorrere di avere evitato l'introduzione del concetto di « retta », come fecero gli Italiani, servendosi dei concetti di punto e distanza. Nella IV Sez. a chi scrive sembra notevole l'introduzione di tre postulati, mediante i quali si giunge a dimostrare, senza alcun sussidio metrico, che i punti « impropri » separati dai « propri » da una superficie di second'ordine sono i punti di un piano. Ma anche qui si trova un'inesattezza, che non ci è lecito lasciare inosservata (p. 178-179). Ivi si tenta di dimostrare veri anche per gli elementi impropri di un piano i « Verknüpfungsaxiome », servendosi esclusivamente del teorema di Desargues. Ma questo teorema viene adoperato solo per costruire l'elemento comune a due altri, ma

Digitized by Google

non (e appunto in ciò stava tutta la difficoltà) per dimostrare l'univocità di siffatta costruzione.

Parliamo ora della Sez. V (geometria metrica): Il « postulato metrico per gli elementi impropri » (p. 246) è superfluo, essendo già incluso nei precedenti. Grossi errori si leggono nella trattazione della congruenza di elementi impropri; p. es. nel § 44, ove si legge: *Teorema:* Se due angoli impropri A B C, A B D dello stesso semipiano hanno un lato comune, avranno anche l'altro. Ora due angoli, secondo la def. dell'A., sono eguali quando i loro lati sono rette omologhe in figure congruenti. Quindi quella proposizione è vera nella geometria euclidea e lo è anche per tutti gli angoli della geometria di Bolyai, tranne quelli i cui vertici stanno sulla forma fondamentale, pei quali essa è falsa. Molto inesattamente a p. 59 è dimostrato il teorema sulla somma degli angoli dei triangoli nella geometria di Riemann (ellittica), mediante una trasformazione che risale a Lexell. Con lo stesso rigore si potrebbe applicare la nota dimostrazione di Euclide del teorema che l'angolo esterno è maggiore di ciascuno dei due interni ed opposti alla geometria ellittica. In tale geometria bisogna discutere accuratamente la posizione dei punti adoperati nelle costruzioni (V. ad es. la mia nota nel vol. 60 dei *Math. Ann.*, apparsa poco prima di quest'opera). Il libro termina con un'appendice sulla teoria della misura. L'ultimo paragrafo del libro è un infelice tentativo per stabilire la teoria dei volumi senza ricorrere alla continuità: si danno le seguenti definizioni: « 1) Un poliedro P dicesi minore di un poliedro Q ($P<Q, Q>P$) se P e Q constano risp. degli stessi poliedri parziali che P e Q e P è interno a Q. 2) Due poliedri P, Q diconsi eguali ($P=Q$, $Q=P$) se non è $P<Q$ nè $P>Q$ ». L'A. sente evidentemente che questa definizione non si sostiene senza qualche appoggio ed osserva che, ad es. seguendo Schautunowski nell'introdurre la misura di volume, si può dimostrare l'impossibilità della coesistenza dello relazioni $P<Q$ e $>Q$. Ma egli non riflette che, in base alla sua definizione, possono esistere poliedri eguali ma di volumi differenti e che ad es. può essere $P=Q=R$ e contemporaneamente $P<R$. Che poliedri di volumi differenti siano diseguali anche seguendo la definizione dell'A. in una geometria discontinua, anche se è vero, sembra molto difficile da dimostrare.

Dal fin qui esposto emerge che all'opera in discorso non si può attribuire che scarsa utilità. Tutto ciò di buono che contiene è già svolto chiaramente e rigorosamente (per non citare che opere tedesche) in Stolz, Pasch e Hilbert. Ma tali qualità di chiarezza e rigore non si trovano per fermo nel libro del Vahlen. M. Dehn (1).

(1) Tradotto dal tedesco col gentile consenso dell'autore, il quale aggiunse alla traduzione i tre periodi di chiusa.

Digitized by Google

J. H. GRAF. — *Briefwechsel von L. Schläfli mit A. Cayleg. Mit dem Facsimile eines Briefes von A. Cayley. Festgabe der Universität Bern für das 50-jährige Jubiläum des eidgenössischen Politechnikums in Zürich 1855-1905*. Bern, K. Wyss, 1905, 8°, p. 42.

Le diciotto lettere adunate in questo opuscolo vanno dal 1856 al 1871 e si susseguono ad intervalli assai irregolari; quelle di Cayly si trovano complete, mentre di quelle dello Schläfli non si ha che il piano generale. Le superficie del terz' ordine formano il soggetto di parecchie, il che non deve meravigliare se si riflette che furono appunto le ricerche degli inglesi se quelle interessanti figure che conducono lo Schläfli alla scoperta delle 36 bisestuple ed alla distribussione in 5 classi di tutte le superficie cubiche reali. Altro punto di contatto fra quei due geometri venne offerto dalle ricerche sulla eliminazione dell' uso, che tanta ammirazione destarono nell' autore delle *Memoris ou quanties*. E poichè lo Schläfli fu uno dei primi e più efficaci cultori della geometria a u dimensioni, è ben naturale l'intesse attestato dal presente conteggio, pel *Memoir ou abstract geometry* (a proposito del quale lo Schläfli solleva delle obbiezioni, di cui il suo illustre corrispondente si affrettò a riconoscere il valore, e a cui solo più tardi trovò il modo di rispondere; v. *Math. papers*, T. XV, p. 596).

Questi brevi cenni basteranno a provare che l' omaggio fatto dell' Università di Berna al Politecnico di Zurigo costituisce anche un bel regalo fatto ai matematici tutti.

G. L.

NOTIZIE

MONUMENTO A COPERNICO IN FRAUENBURG. — All' autore delle grande opera *De orbium coelestium revolutionibus* sin dal 1853 venne eretta una statua in Thorn; Varsavia ne contiene un altra dovuta allo scalpello di Thorwaldsen; Cracovia ne annovera non meno di altri tre; re Luigi di Baviera fece collocare alla Walhalla un busto del grande astronomo, del quale in Italia esistono tre lapidi che ne ricordono il soggiorno a Bologna, Padova e Roma. Manca ancora un monumento che trasmetta ai posteri il ricordo del soggiorno che egli fece per quarant' anni a Frauenburg, ove egli compose il suo immortale lavoro

Digitized by Google

e serenamente si spense. Per erigerlo venne costituito un Comitato, il quale si rivolge per aiuto agli scienziati di tutto il mondo. Le offerte possono essere dirette al Prof. D. Niedenzu oppure al D. Preuss, entrambi a Braunsberg.

***

PREPARAZIONE D'UN'EDIZIONE COMPLETA DELLE OPERE DI LEIBNIZ. — La commissione incaricata dall'Accademia delle scienze e da quella delle scienze morali e politiche dell'Istituto di Francia di collaborare alla preparazione dell'edizione internazionale delle Opere di Leibniz prega i direttori delle biblioteche ed i proprietari di collezioni private della Francia, dell'Inghilterra, dell'America, dell'Olanda, della Svizzera, dell'Italia e della Russia, che possiedono manoscritti o lavori di Leibniz di volerli segnalare al *Comité Leibniz, Institut de France, Paris.*

***

PUBBLICAZIONI RECENTI SULLA STORIA DELLE SCIENZE POSITIVE. — R. Almeglà. *La dottrina della marea nell'Antichità e nel Medio-Evo* (Mem. della R. Acc. dei Lincei, Ser. V, Vol. 5.°, p. 375-514). Introduzione. Cap. I. Gli inizii delle conoscenze della marea presso i greci. Cap. II. La dottrina della marea presso i geografi greci. Cap. III. La dottrina della marea presso romani. Cap. IV. Lo stato della questione alla fine dell'evo classico. Cap. V. Gli scrittori profani dei secoli della decadenza. Cap. VI. Gli scrittori ecclesiastici e i Padri della Chiesa. Cap. VII. Le conoscenze dei Normanni e dei Germani. Cap. VIII. Le conoscenze dei popoli orientali. Cap. IX. La Scolastica. Gli scrittori del secolo decimoterzo. Cap. X. Opinioni vecchie e nuove nel secolo XIV. Cap. XI. I progressi delle conoscenze fino al termine del Medio-Evo. — Conclusione: Lo stato della questione alla fine dell'Evo-Medio.

***

IL VOL. III DEI RENDICONTI DELLE SEDUTE DELLA SOCIETÀ MATEMATICA DI BERLINO (Leipzig, Teubner, 1905; prezzo Mk. 2.80) contiene scritti di Granz, Hauck, Hessenberg, Kneser, Knoblauch, Kötter, Koppe, Lampe, Müller, Reissner, Rothe, Schafheitlin, Zacharias e Zühlke.

***

UN ARTICOLO DEGNO DI VENIRE LETTO è quello di F. Marotte sopra *L'évolution de l'enseignement mathématique en Angleterre et en*

Digitized by Google

Allemagne, pubblicato nel fascicolo di ottobre 1905 del *Bulletin des Sciences Mathématiques*. È ivi esposto con precisione e chiarezza lo stato della questione che attualmente si agita nei paesi anglo-sassoni d'Europa, sotto la direzione del Perry e del Klein, per svecchiare i programmi delle scuole secondarie. La lettura di esso indurrà molti a chiedersi se l'Italia, restando estranea a tale movimento, non rischi di trovarsi ben presto, per quanto concerne l'insegnamento matematico, alla coda di tutte le nazioni civili.

***

UNA RIVISTA CHE NASCE DALLE CENERI DI UN'ALTRA. — Col volume XV, testè compiuto, il *Jornal de sciencias mathematicas e astronomicas*, pubblicato dal Prof. F. Gomes Teixeira, cessa le sue pubblicazioni e viene assorbito dagli *Annaes scientificos da Accademia polytechnica' do Porto publicados sob a direcao de* F. G. Teixeira, i quali aprono le loro colonne anche agli scienziati non portoghesi. D'interressante i nostri lettori il primo fascicolo contiene: Teixeira, *Questao entre Monteiro da Rocha e Anastacio da Cunha;* Nielsen, *Sur les séries neumaniennes de fonctions spheriques.*

***

UNIVERSITÀ DI NEW-YORK. — Il Prof. V. F. K. Bierknes, dell'Università di Stoccolma, terrà nel prossimo Dicembre nella « Columbia University » un corso di otto lezioni sopra i « Campi di forza », delle quali ecco il programma:

1 e 2. Investigazione elementare delle propietà geometriche dei campi idrodinamici (con esperienze).
3. Proprietà geometriche dei campi elettromagnetici, secondo la teoria di Maxwell.
4. Proprietà dinamiche dei campi elettromagnetici secondo la teoria di Maxwell.
5. Trasformazione delle equazioni idrodinamiche sotto forme che dimostrano l'analogia dei campi idrodinamici ed elettromagnetici stazionari.
6. Ulteriore sviluppo e discussione di detta analogia.
7. Conclusioni generali. Osservazioni sopra i metodi di ricerca e di esposizione della fisica matematica.
8. Lezione supplementare. I campi di forza idrodinamici nell'atmosfera e sul mare. Discussione del problema fondamentale della metereologia e dell'idrografia.

Digitized by Google

***

PROGRESSI DELLA « FUSIONE » IN FRANCIA. — In data 25 Luglio 1905 vennero diramati in Francia nuovi programmi di matematica per le scuole secondarie, i quali sono informati ad uno spirito di modernità, che va rilevato a lode di chi li redasse. Si vede da essi come gli ideali degli attuali governanti siano ben diversi da quello che proponevasi il primo Napoleone, quando prefiggevasi di ottenere che tutti gli scolari francesi di ogni corso si occupassero nella stessa ora della medesima questione. Infatti nell'esordio dei documenti in questione si legge: « I programmi di matematica devono considerarsi come semplici indici delle materie da insegnare nelle varie classi: al professore è lasciata la massima latitudine nella scelta dell'ordine e dei metodi, che gli parranno più profittevoli agli allievi da lui diretti »; idea questa che viene più innanzi confermata dalle parole: « è sottinteso che l'ordine indicato non è quello che si dovrà seguire nell'insegnamento ». Riguardo alle classi A(latino e greco) e B(latino e lingue moderne) si avverte poi: « In particolare, sarebbe interessante di riunire in geometria prima tutto ciò che è descrittivo, poi tutto ciò che è metrico, *riavvicinando lo studio dello spazio a quello del piano;* ciò non presenta difficoltà alcuna per scolari che fecero già un primo studio della geometria, ed offre il vantaggio di raggruppare i fatti somiglianti, dando così una veduta d'insieme, senza della quale riesce difficile di coordinare le idee ». Queste frasi sono la constatazione ufficiale del trionfo delle idee propugnate dal Prof. Méray. Al conseguimento di siffatto risultato contribì efficacemente la pubblica opinione, che, dal 1900, si è manifestata ad esse favorevole, come (a tacer d'altro) emerge dal voto diretto nel 1904 al Ministro della P. I. « dall'Association française pour l'avancement des sciences » che « facesse adottare nell'insegnamento primario e secondario il metodo d'insegnamento geometrico inaugurato da Méray ». Lo stesso sodalizio in Febbraio 1905 conferiva la sua grande medaglia di bronzo al Méray ed alle otto persone che meglio contribuirono alla diffusione de' suoi metodi. Se effettivamente « fra tre anni la geometria tradizionale sarà per sempre scomparsa dalle scuole » (J. Boudier, *L'enseignement chrétien*, Octobre 1905, p. 526) è una previsione, che solo il tempo mostrerà fondata o non; ciò che è certo si è che la tanto discussa « fusione » è ormai attuabile in Francia; si apre, quindi, un vasto campo di interessanti esperienze, sui cui risultati ci studieremo di tenere informati i nostri lettori.

Bestonzo Pietro, Gerente.

Genova - Tipografia R. Istituto Sordomuti - 1905.

Digitized by Google

CARLO CLAUSEN

HANS RINCK Succ.

LIBRAIO DELLE LL. MM. IL RE E LA REGINA

e della R. Accademia delle Scienze di Torino

11, Via Po — TORINO — Via Po, 11

La Libreria Carlo Clausen

spedisce gratuitamente a chi li richiede i seguenti Bollettini trimestrali:

N. I. Bollettino di Scienze Mediche
» II. Bollettino di Scienze Tecniche
» III. Bollettino di Novità Letterarie
» IV. Bollettino di Scienze Naturali

e s'impegna, a richiesta, di tenere correntemente informati i Clienti di tutte le pubblicazioni in qualunque lingua che si riferiscano ai loro studi speciali.

La Libreria Antiquaria Carlo Clausen

ha un fondo di libri antichi e moderni rari e curiosi, a prezzi ridotti, che la mette in grado di soddisfare, alle migliori condizioni, ogni richiesta. Pubblica cataloghi divisi per materia e in ogni ramo di scienze e li spedisce **gratis** e franco. Compra biblioteche e singole opere di valore in contanti, o ne fa cambio con altre opere a scelta.

Grande assortimento di Opere Scientifiche nelle principali lingue

Digitized by Google

SOMMARIO DEL FASCICOLO

R. MARCOLONGO. *Sul teorema della composizione delle rotazioni istantanee. Appunti per la Storia della meccanica nel Sec. XVIII.*

RECENSIONI ED ANNUNZI.

P. DUHEM. *Les origines de la Statique.* I. [G. VAILATI].
THOMAE. *Sammlung von Formeln und Sätze aus dem Gebiete der elliptischen Funktionen* [G. L.].
R. FRICKE. *Hauptsätze aus der Differential-und Integralrechnung.*
C. ARZELÀ. *Trattato di algebra elementare* [C. SEVERINI].
R. GANS *Einführung in die Vektoranalysis* [G. L.].
A. FURHMANN. *Aufgaben aus der analytischen Mechanik.* I. [G. L.].
GRASSMANN. *Werke.* II. Band., I. Teil. [G. L.].
APPELL ET CHAPPUIS. *Leçons de Mécanique élémentaire* [R. MARCOLONGO].
G. LECHALAS. *Introduction à la Géométrie générale* [G. L.]
FISHER. *Kurze Einleitung in die Differential-und Integralrechnung* [G. L.].
VAHLEN. *Abstrakte Geometrie* [M. DEHN].
J. H. GRAF. *Briefwechsel von Schläfli mit Cayley* [G. L.].

NOTIZIE.

Monumento a Copernico. — Preparazione d'un'edizione completa delle opere di Leibnitz. — Pubblicazioni recenti sulla storia delle scienze positive. — Il vol. III dei rendiconti delle sedute della Società Matematica di Berlino. — Un articolo degno di venire letto. — Una rivista che nasce dalle ceneri di un'altra. — Università di New-York. — Progressi della «fusione» in Francia.

IL BOLLETTINO DI BIBLIOGRAFIA E STORIA

DELLE

SCIENZE MATEMATICHE

si pubblica a fascicoli trimestrali di almeno 32 pagine cadauno.

L'abbonamento è fissato al prezzo annuo di **L. 6** per l'Italia e di **L. 7,50** per l'Unione Postale, *pagabili anticipatamente.*

Gli abbonamenti si ricevono presso l'editore **Carlo Clausen (Hans Rinck Succ.)** in **Torino** - Via Po, N.° 11 - e presso i principali librai d'Italia e dell'estero.

Per quanto concerne l'Amministrazione rivolgersi esclusivamente all'Editore stesso. Indirizzare invece lettere, manoscritti, libri, giornali e tutto ciò che riflette la Redazione al **Prof. Gino Loria** della R. Università di **Genova.**

Digitized by Google

BOLLETTINO DI BIBLIOGRAFIA

E

STORIA

DELLE

SCIENZE MATEMATICHE

pubblicato per cura di

GINO LORIA

Anno IX - Fasc. 2.°

(con una tavola in zincotipia)

TORINO

CARLO CLAUSEN (HANS RINCK Succ.)

Libraio delle LL. MM. il Re e la Regina

1906.

Digitized by Google

Opere del Prof. GINO LORIA

della R. Università di Genova

IL PASSATO ED IL PRESENTE

DELLE PRINCIPALI

TEORIE GEOMETRICHE

Seconda edizione accresciuta ed interamente rifatta

Lire 8.

SPEZIELLE

algebraische und transscendente

EBENE KURVEN

THEORIE UND GESCHICHTE

Autorisierte, nach dem italienischen Manuskripte bearbeitete deutsche Ausgabe

von

FRITZ SCHÜTTE

Mit 174 Figuren auf 17 lithographirten Tafeln

Mark 28.

LE SCIENZE ESATTE

NELL' ANTICA GRECIA

Libro I e II: *esauriti.*

Libro III. - **Il substrato matematico della filosofia naturale dei Greci.** L. 4 —

Libro IV. - **Il periodo argenteo della geometria greca** . . . . . „ 4 —

Libro V. - **L' aritmetica dei Greci** . . . . . „ 5 —

LE

TRASFIGURAZIONI DI UNA SCIENZA

DONNE MATEMATICHE

Seconda edizione accresciuta di note

Lire 2.

Per commissioni rivolgersi alla

Libreria CARLO CLAUSEN – HANS RINCK Succ.

Via Po, 11 — TORINO — Via Po, 11

Digitized by Google

BOLLETTINO DI BIBLIOGRAFIA E STORIA
DELLE
SCIENZE MATEMATICHE
ANNO IX. — Aprile, Maggio e Giugno — 1906.

IL MODELLO DI BELTRAMI
DI SUPERFICIE A CURVATURA COSTANTE NEGATIVA (1)

NOTA DI ROBERTO BONOLA.

1. Il modello, di cui nella tavola annessa si vedono due riproduzioni fotografiche, fu costruito da EUGENIO BELTRAMI ed appartiene ora all'ISTITUTO MATEMATICO di Pavia. È formato con tanti quadrilateri di carta X'Y Y' [fig. a pag. 34], raffiguranti ciascuno un pezzo di *pseudosfera*, compreso fra due geodetiche parallele [Y X, Y'X'] e due archi [Y Y', XX'] di circonferenza di raggio infinito ad esse perpendicolari. Ogni quadrilatero [*listerella* od *elemento* della superficie] è munito della relativa espansione, necessaria per congiungerlo materialmente agli altri quadrilateri: la lunghezza dei lati geodetici è mm. 344; la lunghezza, rettificata approssimativamente, dell'arco Y Y' è circa mm. 80, quella dell'arco X X' è mm. $\frac{80}{4} = 20$. Nel suo insieme il *modello* rappresenta un *cerchio geodetico:* il raggio geodetico di questo cerchio è lungo mm. 516, cioè una volta e mezza il lato rettilineo della listerella.

Sulla prima delle due zincotipie contenute nella tavola, si può seguire facilmente la spiegazione della superficie. Si fissi perciò l'attenzione sui due archi che l'attraversano, dall'alto verso il basso, e che rassomigliano, quello a destra, ad un arco di parabola, quello a sinistra, ad un arco di cerchio. Essi appartengono a due cerchi concentrici di raggio infinito, distanti l'uno dall'altro di mm. 341, e dividono il *modello* in 3 *regioni*, costruibili separatamente coi quadrilateri sopra descritti.

La *I.ª regione*, quella a destra del primo arco [contrassegnato sul *modello* con le lettere E', F'], è formata con 14 quadrilateri, riuniti l'uno all'altro lungo i lati geodetici. I lati ricurvi dei quadrilateri ven-

(1) Un cenno di esso fu già fatto in questo *Bollettino* (T. VII, 1904, p. 64) quando si preparò l'Esposizione di modelli annessa al III Congresso internazionale dei matematici.

Digitized by Google

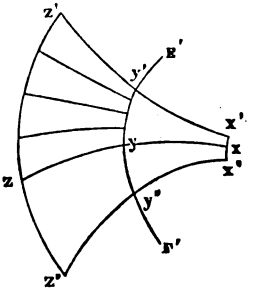
gono a trovarsi l'uno sulla prosecuzione dell'altro, e più precisamente tutti i maggiori verso sinistra, i minori verso destra. Nella fig. intercalata nel testo si vede come i due quadrilateri X Y Y′ X′, X Y Y″ X″ siano riattaccati fra loro.

Il pezzo di superficie ottenuto dalla riunione dei 14 elementi è alla sua volta un quadrilatero, analogo ai predetti, in cui i due lati geodetici hanno la lunghezza di mm. 344 ed i lati circolari sono ciascuno il quattordicesimo multiplo dei corrispondenti archetti Y Y′, X X′. Il lato circolare maggiore è l'arco E′ F′, che, sul *modello*, separa la I.ª dalla II.ª *regione*.

Quest'ultima è composta con 42 quadrilateri, uguali ai precedenti, riuniti l'uno all'altro nello stesso modo di quelli che formano la I.ª *regione*. Il pezzo di superficie che così risulta è alla sua volta un quadrilatero con due lati opposti, lunghi mm. 344, raffiguranti segmenti geodetici paralleli, e gli altri due, formati ciascuno dalla somma di 42 archetti, uguali gli uni ad Y Y′, gli altri ad X X′, raffiguranti due archi circolari di raggio infinito.

Se ora si tien conto delle proprietà delle superficie pseudosferiche è chiaro che si potrà riattaccare la I.ª alla II.ª *regione*, saldando il lato circolare maggiore di quella al lato circolare minore di questa, in modo che i punti di mezzo di tali lati coincidano.

Nel pezzo di superficie che così si ottiene, a ciascuno dei 10 *elementi* centrali della I.ª *regione* ne sono attaccati 4 della II.ª, e le linee [X Y], secondo cui sono congiunti due *elementi* della I.ª si trovano proseguite dalle linee [Y Z] di congiunzione di due *elementi* della II.ª.



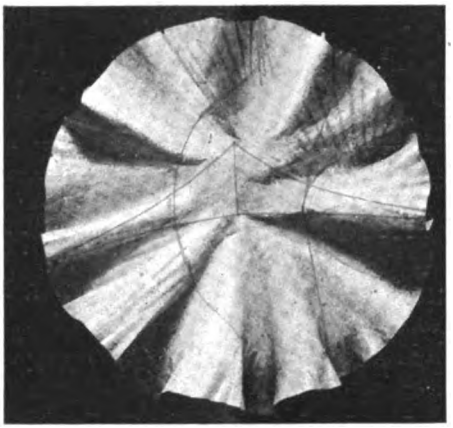
I due segmenti X Y, Y Z appartengono poi ad una stessa geodetica X Z, e due geodetiche [X Z, X′ Z′] di tale tipo sono fra loro parallele.

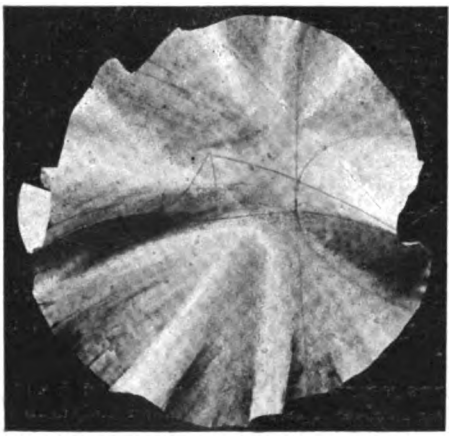
La III.ª *regione* è costruita con 82 delle solite listerelle (1), attaccate fra loro nel solito modo: la regione è poi saldata alla II.ª, come la II.ª è saldata alla I.ª.

Dopo aver riunite le tre regioni non resta che dare alla superficie una sagoma circolare. Il centro [C] della circonferenza che limita il *modello* appartiene ad una delle geodetiche lungo le quali sono saldati due elementi della *I.ª regione*, due della *II.ª*, due della *III.ª*. Sul *modello* questa linea [*diametro del cerchio geodetico*] è segnata con A B ed è visibile completamente nella figura superiore della nostra tavola.

(1) Effettivamente però sul *modello*, verso ciascun estremo della III.ª regione, 16 delle listelle in discorso sono sostituite con 8 più ample, ciascuna delle quali vale due delle precedenti.

Digitized by Google





Digitized by Google

Digitized by Google

Altre linee disegnate sulla superficie sono le seguenti:

a) un segmento geodetico O C, perpendicolare al diametro A B, nel suo punto di mezzo;

b) una geodetica O N, che insieme alla A B limita, nella *I^a regione*, una delle listerelle che la compongono;

c) la geodetica O M, simmetrica di O N, rispetto ad O C;

d) l'arco circolare [E' F'] di raggio infinito, che separa le due prime regioni;

e) la geodetica H K normale al diametro A B, nel punto in cui esso è incontrato dall'arco E' F';

f) l'arco E F, simmetrico di E' F', rispetto ad H K.

Tutte le linee indicate, tranne E F, si vedono abbastanza chiaramente sulle figure della tavola, nelle quali, segnatamente nella prima, sono visibili anche le linee di congiungimento fra listerella e listerella.

2. Essendo la geodetica O N parallela alla geodetica A B, l'angolo $\widehat{NOC}$, compreso fra O N e la geodetica O C perpendicolare al A B, è l'*angolo di parallelismo* che corrisponde alla distanza O C.

Misure dirette, eseguite sul *modello*, portano ai seguenti risultati numerici:

$$\text{lunghezza seg. O C} = \text{mm. } 197$$
$$\widehat{CON} = 52^0\ 5'\ 48'',58$$

Con il sussidio di questi dati è possibile valutare, approssimativamente, la *curvatura* della superficie rappresentata dal *modello*. Infatti, è noto che alla relazione fra l'angolo di parallelismo $\Pi(x)$ ed il corrispondente segmento x, può darsi la forma:

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} \Pi(x) = e^{-\frac{x}{k}},$$

ove k è il valore assoluto dei due raggi principali di curvatura. Perciò avremo:

$$k = \frac{x \log e}{\log \operatorname{ctg} \frac{1}{2} \Pi(x)},$$

da cui, sostituendo per x, e, $\Pi(x)$ i relativi valori numerici si deduce:

$$k = \text{mm. } 269$$

e successivamente

$$K = -\frac{1}{k^2} = -\frac{1}{72361}.$$

3. Poichè le listerelle di carta, con cui è composto il *modello* di BELTRAMI, non sono che piccole porzioni di piano, così l'*intero mo-*

Digitized by Google

dello non è una superficie a curvatura costante negativa: tuttavia esso da un'idea approssimata della pseudosfera, nella stessa guisa che una poligonale regolare di un numero abbastanza grande di lati dà un'idea approssimata di un arco di cerchio.

La flessibilità del *modello* permette di seguire le possibili deformazioni di un pezzo regolare e semplicemente connesso di superficie a curvatura costante negativa. Così, ad es., si potrebbe avvolgere il foglio in modo da conferirgli una qualsiasi delle tre forme tipiche di rotazione per sifatte superficie.

4. L'interesse ch'ebbero per BELTRAMI le superficie di curvatura costante deve ricercarsi nel fatto che la loro geometria coincide con la *Geometria generale*, cioè indipendente dal postulato delle parallele. La pseudosfera attrasse più particolarmente la sua attenzione perchè trovò su di essa realizzata concretamente la dottrina di LOBACEFSKI-BOLYAI (1). Ma nel suo « *Saggio d'interpretazione della geometria non euclidea* », in cui pone in luce questo fatto, nulla dice che ci faccia supporre d'aver costruito, per quell'occasione, il suo *modello*. Nell'articolo « *Sulla superficie di rotazione che serve di tipo alle superficie pseudosferiche* », scritto nel 1872, volendo egli renderci conto della via tenuta in una parte delle ricerche ivi esposte, ci fa sapere che alcuni teoremi sviluppati nell'articolo furono da lui incontrati « nel corso di certe ricerche sulla detta superficie di rotazione, istituite allo scopo di preparare gli elementi geometrici d'una *costruzione materiale*, possibilmente facile ed esatta, della superficie stessa », dichiarando, in pari tempo, di non volere, allora, estendersi su tale particolare, nè sviluppare le considerazioni in base alle quali gli era sembrato desiderabile l'attuazione di sifatto divisamento » (2). E più oltre, in una nota, riferendosi ad una proprietà dei cerchi osculatori alla sezione tangenziale della superficie generata con la rotazione della *trattrice*, scrive: « Ritengo che sifatta proprietà sia quella cui converrebbe fare appello qualora si trattasse di costruire materialmente, mercè un processo meccanico facile ad immaginarsi, la superficie rotonda di cui qui è parola ».

Da tutto ciò emerge che BELTRAMI, intorno al 1872, mirava a realizzare un modello concreto di superficie di curvatura negativa co-

(1) Per più esattezza notiamo che, antecedentemente ad ogni interpretazione della *Geometria non-euclidea*, BELTRAMI aveva già riconosciuto [1865] un notevolissimo interesse alle superficie in discorso, dovuto alla loro proprietà caratteristica di ammettere una rappresentazione lineare per le geodetiche, e che per questa via entrò « senza volerlo e quasi senza saperlo, nelle dottrine di Lobatschewski, Riemann, ecc. » Cfr. la lettera scritta da BELTRAMI a D'OVIDIO il 25 dic. 1872 e riportata nel t. XXXV, p. 541-3, degli Atti dell'Acc. delle Scienze di Torino.

(2) Cfr. Giornale di Matem. t X, p. 147.

Digitized by Google

stante. E verso la fine del '73 il *modello* era costruito, imperocchè FELICE CASORATI, nel suo discorso per l'inaugurazione degli studi universitari a Pavia (1), il 16 novembre 1873, esponendo le vedute di LOBACEFSKI, RIEMANN, HELMHOLTZ sulla struttura dello spazio, svolgeva davanti al suo uditorio un modello in carta di superficie a curvatura costante negativa.

Che tale *modello* fosse la superficie di BELTRAMI non è da dubitare: il nome di « *Cuffia della nonna* », col quale fu battezzato da un giornaletto pavese dell'epoca, « *La Canaglia* » (2), è lo stesso con cui si soleva indicare in casa del prof. CASORATI la superficie di BELTRAMI.

5. Vicende notevoli non sembra toccassero al *modello*. Costruito, con ogni probabilità, fra il 1872 e il '73, quando BELTRAMI era professore all'Università di Bologna, fu poi inviato, nell' occasione del suddetto Discorso, al CASORATI. Non è probabile che questi rimandasse il *modello* a BELTRAMI, stabilitosi intorno a quell'epoca a Roma, perchè gl'intimi del prof. CASORATI rammentano d'averlo sempre veduto nella sua casa. Sicchè BELTRAMI si riavvicinò alla sua superficie forse soltanto nel 1876, quando lasciò Roma per Pavia. E nemmeno allora la ritirò presso di sè, perchè le figlie e gli intimi del CASORATI ricordano d'aver veduta la superficie, anche dopo il 1876, in armadio a vetri della biblioteca del professore, ove già trovavasi da qualche anno.

Ne aveva BELTRAMI fatto un dono all'amico?... Ciò può supporsi, tanto più che dopo la morte di CASORATI [1890] ed il successivo trasferimento di BELTRAMI a Roma [1891] il *modello* restò ancora a Pavia e fu conservato fra le carte e i libri di CASORATI, in una villa dell'ing. FRANCHI-MAGGI, genero di quest'ultimo, situata fuori porta Garibaldi, nella località detta S. PIETRO IN VERZOLO.

In quel luogo il *modello* rimase per molti anni, fino a che il prof. GIAN ANTONIO MAGGI, genero egli pure del CASORATI, uno dei pochi che sapeva ov' esso trovavasi, lo portò, nel 1902, a Pisa, per mostrarlo ai colleghi di quell'Università. Da Pisa, verso la fine del 1903, la superficie fece ritorno a Pavia e sul principio del 1904, dalle

(1) Nella raccolta di titoli dei « *Discorsi inaugurali dell'Anno Accademico dal 1859-60 in poi* » pubblicata nell'Annuario dell'Università di Pavia, pel 1895-96 [p. 263-4], sotto la data 1873-74 si legge: CASORATI; « *Sulle superficie pseudosferiche e Commemorazione di Antonio Bordoni* ». È questa l'unica indicazione ufficiale del discorso in parola; poichè avanti il 1876 non si soleva a Pavia stampare nell'annuario l'orazione inaugurale.

(2) Anno 4°, 23 Novembre 1873, n.° 177, 2.ª pagina. Nell'articoletto « *Apertura* », che è una irriverente parodia del discorso di CASORATI, si legge appunto: « Così resta spiegato il fenomeno della cuffia di mia nonna *(il prof. Casoratti fa vedere agli astanti la cuffia in questione)* ».

Digitized by Google

figlie del prof. CASORATI, signore EUGENIA MAGGI e BIANCA FRANCHI-MAGGI, fu offerta in dono al nostro ISTITUTO MATEMATICO (1), del quale ora arrichisce la *Collezione di Modelli*.

Pavia, Aprile 1906.

RECENSIONI ED ANNUNZI

Oeuvres de CHARLES HERMITE, *publiées sous les auspices de l'Académie des Sciences, par* EMILE PICARD. Tome I. Paris, Gauthier-Villars, 1905 [Prezzo fr. 18].

Non appena, quattro anni or sono, Carlo Hermite (cfr. *Bollettino*, t. IV, 1901, p. 16) scese nella tomba, i geometri, che erano stati prima suoi discepoli e poi suoi colleghi all'Accademia di Francia, deliberarono di farsi iniziatori della pubblicazione delle opere complete di quel grande, e ciò, non soltanto coll'idea di rendere omaggio alla memoria di luì, ma anche perchè più chiaro si palesasse il nesso che fra di esse intercede e si ravvivasse il benefico influsso emanante dalle stesse. Il bel volume che annunziamo attesta che tale nobile disegno è in via di esecuzione, sotto la direzione di chi meglio d'ogni altro sembrava a ciò indicato. Tale volume si apre con la splendida lezione fatta dal Picard alla Sorbona sull'opera scientifica di Carlo Hermite poche settimane dopo la sua morte, e contiene tutti i lavori da lui pubblicati nel periodo 1842-1858 (cfr. questo *Bollettino*, 1901, p. 20-22) (2). La riproduzione venne fatta con diplomatica fedeltà; soltanto vennero corretti alcuni pochi errori di calcolo, rivelati da un'accurata revisione del testo, fatta dal Picard coll'aiuto del compianto Prof. Stouff. Le relative osservazioni ed altri pochi dati utili si trovano in apposite sobrie note.

La maggior parte dei lavori accolti in questo volume sono omai classici e giustamente famosi; ma altri caddero in un'ingiusta dimenticanza, dalla quale, è pressumibile e sperabile, veranno tolti dall'attuale ripubblicazione; cittiamo ad es. la dimostrazione, ideata da Hermite quando era studente di liceo, per l'irrisolubilità delle equazioni di grado superiore al quarto.

---

(1) Dal verbale della Facoltà di Matematiche e Scienze, del 21 Gennaio 1904, in un comunicato del prof. BERZOLARI, risulta questo dono, intermediari del quale furono l'ing. FRANCHI-MAGGI ed il prof. MAGGI.

(2) Perchè non venne indicato per ogni lavoro l'anno di pubblicazione?

Digitized by Google

La riproduzione di un ritratto a matita di Hermite venticinquenne cresce l'attrattiva del discorso volume.

G. L.

CORRESPONDANCE D'HERMITE ET DE STIELTJES, *publiée par les soins de* B. BAILLAUD *et* H. BOURGET. *Avec une Préface de* E. PICARD. T. II. *(18 Octobre 1889, 15 Décembre 1894).* Paris, Gauthier-Villars, 1905, 8° gr., p. 464 [Prezzo fr. 16].

Col presente volume resta completata l'opera, di cui già segnalammo il principio (v. *Bollettino*, t. VIII, 1905, p. 38); la corrispondenza di Hermite e Stieltjes si chiude con una lettera del primo, scritta due settimane innanzi la morte dell'altro; essa termina con l'augurio (che pur troppo non doveva venira esaudito) che il valoroso geometra olandese riaquistasse le forze di cui egli avvertiva il continuo declinare.

L'interesse scientifico del II volume della corrispondenza in esame non è minore di quello offerto dal primo, non foss'altro perchè si assiste col suo mezzo alla formazione ed al primo svolgimento delle idee dello Stieltjes sopra le frazioni continue algebriche, che forse costituiscono il suo titolo più serio all'immortalità. Ma inoltre si trovano in esso dati e fatti capaci di attrarre l'attenzione dello storice; a provarlo valgono i due passi seguenti di due lettere di Hermite:

(p. 131) « Un élève de Clebsch, qui a suivi mes leçons, M. Pasquier, astronome, professeur à Louvain, m'a appris que l'éminent géomètre qui a produit tant de beaux Mémoires, travaillait très-peu. Les idées lui venaient heureuses et abondantes, il les livrait à des jeunes ouvriers, enchantés de travailler sous ses yeux, avec sa direction, qui lui supprimaient, en faisant les calculs avec grand soin, tout travail matériel, et c'était au grand profit de la Science comme de ses auxiliares ».

(p. 199). « De M. Duhamel, je tiens ce fait extrèmement honorable que Legendre étant sous l'empire examinateur de sortie à l'École Polytéchnique a reçu du gouverneur de l'École, M. de Cessac, l'avis de ne point porter sur sa liste de classement le nom d'un élève qu'il lui faisait connaître, et qu'arrivant à la séance du Conseil où devait etre arretée cette liste, Legendre commençant la lecture s'était arreté subitement, laissant toute l'assistance dans l'étonnement. Et, après une attente suffisante, il déclara d'un ton froid et absolu qu'il n'irait plus loin, M. le Gouverneur lui ayant fait défense de porter sur le classement le nom de l'elève auquel s'était arreté. « Je ne le nommerai point, ni lui ni aucun de ceux qui le suivent ». Et force a été

Digitized by Google

de laisser sur la liste l'élève que le gouvernement de l'ampereur voulait exclure ».

Gli editori nel publicare queste lettere vi tolsero tutti i passi di natura intima e personale; di ciò in generale va loro data lode; tuttavia, trattandosi di una personalità, come Hermite, omai passata alla storia, più d'un lettore farà un moto d'impazienza trovando una lacuna dopo queste parole (p. 314):

« Et maintement, cher Ami, veuillez entr'ouvrir la porte qui donne accès au confidences, ne pouvant me retenir de vous conter non histoire ».

Il volume in discorso porta, accanto al frontispizio, quello stesso ritratto che adorna il I vol. delle *Opere* di Hermite. Ora, perchè mai, si scelse l'immagine di Hermite *venticinquenne* per illustrare una corrispondenza epistolare da lui cominciata a *sessant' anni?*...

G. L.

ERNST RICHARD NEUMANN. — *Studien über die Methoden von* C. NEUMANN *und* G. ROBIN *zur Lösung der beiden Randwertaufgaben der Potentialtheorie.* Preisschriften gekrönt und herausgegeben von der « *Fürstlich Jablonowskischen Gesellschaft zu Leipzig* ». Leipzig, B. G. Teubner, 1905, 8° gr., p. XXIII+191, c. 9 fig. [Prezzo Mk. 10].

Senza dubbio il *metodo della media aritmetica* di C. NEUMANN per la dimostrazione del *principio di Dirichlet* è quello che offre maggiore interesse degli altri attuali metodi; perchè: 1.° esprime la funzione incognita mediante un doppio strato (nel caso del problema interno) o mediante uno strato e un doppio strato (nel caso del problema esterno); 2.° come mostrò lo stesso C. NEUMANN (1) (v. *Untersuchungen über das logarithmische und Newton' sche Potential*, pag. 216), riconduce il problema *derivato di Dirichlet* a quello *di Dirichlet;* 3.° la sua analogia col noto metodo di ROBIN (2), che gli seguì, per la risoluzione del *problema fondamentale dell'elettrostatica*, stabilisce già un certo legame tra questo problema e quello *di Dirichlet.*

(1) Le considerazioni che a questo riguardo fa C. NEUMANN non sono completamente soddisfacenti; però si può dare una dimostrazione rigorosa del suo risultato [Cfr. la mia Mem.: *Sull'integrazione delle equazioni della propagazione del calore;* Mem.: della Società italiana delle Scienze (detta dei XL), Serie 3ª, Tomo XII, pag. 130 e seg.].

(2) La dimostrazione data dal ROBIN nel caso dei campi convessi per la validità del suo metodo è monca in qualche punto; una dimostrazione rigorosa in proposito è stata data per la prima volta da W. STEKLOFF nella sua Nota: *Le problème de la distribution de l'électricité et le problème de Neumann* (Comptes rendus, 13 décembre 1897).

Digitized by Google

Pero, come è noto, la convergenza della *serie di Neumann* (densità del doppio strato) fu da lui stesso dimostrata solo nell'ipotesi che la superficie in considerazione fosse convessa, e per parecchi anni le cose rimasero a questo punto, malgrado che qualche esempio speciale avesse fatto prevedere già che tale ipotesi non fosse necessaria. Solo nel 1896 il POINCARÉ nella sua celebre Memoria: *La méthode de Neumann et le problème de Dirichlet* (Acta mathematica, t. XX) dimostrò per la prima volta nel modo più generale la convergenza delle *serie di Neumann* per i campi non convessi. In questa stessa Memoria il POINCARÉ stabilì ancora un perfetto legame di dipendenza tra il *problema di Dirichlet*, quello *derivato di Dirichlet* e quello *fondamentale dell'elettrostatica;* e introdusse alcune specie di funzioni armoniche, dette *fondamentali* (o anche *eccezionali*), di cui le funzioni sferiche e cilindriche sono casi particolari, per mezzo delle quali può svilupparsi una funzione arbitraria dei punti di una superficie chiusa.

Lasciando da parte qui la quistione delle *funzioni armoniche eccezionali* e dei relativi sviluppi in serie, osserveremo che i risultati del POINCARÉ richiedono: 1° che la funzione arbitraria (dei punti della superficie in considerazione) che comparisce nel *problema di Dirichlet*, oltre di essere finita e continua, soddisfi ad altre condizioni; 2° che sia dimostrato in un modo qualsiasi il *principio di Dirichlet* (ad es. col suo noto metodo del *balayage*); 3° che alla superficie in considerazione sia applicabile un teorema (che diremo con E. R. NEUMANN: *principio di Poincaré*), il quale sussiste certamente per la classe molto speciale di superficie che ammettono una certa trasformazione, messa in evidenza dallo stesso POINCARÉ.

La Memoria del POINCARÉ fu seguita: *a)* Da un lavoro di E. LE ROY (1), il quale estende i risultati del POINCARÉ alle equazioni della propagazione del calore. *b)* Da una importante Memoria del LIAPOUNOFF (2), il quale fra altro dimostra: 1° che ammessa la convergenza della *serie di Neumann* relativa ad una data superficie convessa o no, per essa superficie vale pure il *metodo di Robin*; 2° che ammessa la continuità della funzione arbitraria della superficie in considerazione e la convergenza della corrispondente *serie di Neumann*, la funzione che risolve il *problema di Dirichlet* si può esprimere mediante la nota *funzione di Green*. *c)* Da diversi lavori di A. KORN (3) e di

(1) *Sur l'intégration des équations de la chaleur*. Thèse presentée à la Faculté des sciences de Paris, anno 1897.

(2) *Sur certaines questions, qui se rattachent au problème de Dirichlet;* Journal de Mathématiques, S. 5ª, T. IV, anno 1898.

(3) Vedi principalmente il suo libro: *Lehrbuch der Potentialtheorie*, Berlino, 1899.

Digitized by Google

W. STEKLOFF (1), i quali dimostrano la convergenza della *serie di Neumann* e di quella *di Robin*, ammessa la sola continuità della funzione della superficie in considerazione e indipendentemente dal *principio di Dirichlet*; però tanto il KORN, quanto lo STEKLOFF suppongono sempre che alla superficie, che si considera, sia applicabile il *principio di Poincaré*.

Il lavoro di E. R. NEUMANN, del quale qui mi propongo di parlare, è stato premiato dalla Fürstlich Jablonowski'schen Gesellschaft in seguito a concorso. Esso, oltre a rispondere pienamente al tema di tale concorso (2), ha il particolare vantaggio di potere essere letto senza difficoltà anche da chi ha poca pratica degli studi relativi alla teoria del *potenziale newtoniano*.

Circa all'esposizione il NEUMANN (E. R.) si ispira ai concetti di rigore introdotti da LIAPOUNOFF con perfetta uniformità di metodo. Purtroppo egli non riesce, malgrado i molti perfezionamenti introdotti, a liberare la dimostrazione della convergenza della *serie di Neumann* (e così di quella di Robin) dalla necessità di ammettere il *principio di Poincaré*, mediante il quale principio i nuovi ed importanti risultati, che ottiene, divengono non necessari; bisogna però riconoscere che Egli va assai più in là del KORN e dello STEKLOFF nella ricerca di una dimostrazione della suddetta convergenza, la quale sia indipendente dalle condizioni richieste dal POINCARÉ e non sia inceppata da continui artifizi analitici.

Ecco in succinto il contenuto del lavoro di E. R. NEUMANN:

Cap. I) L'A, seguendo il LIAPOUNOFF (l. c.), fa alcune ipotesi sulla superficie non convessa che considera, traendone delle conseguenze, e spiega i varii concetti di *derivata normale* di una funzione in un punto della superficie. Ciò premesso, stabilisce le note *formole di Green* nell'ipotesi che le derivatenormali (definite precedentemente) delle funzioni, che vi compariscono, siano finite e continue anche nei punti della superficie, senza tenere conto del modo di comportarsi nei punti di tale superficie delle derivate parziali prime delle funzioni stesse. In fine definisce due specie di funzioni armoniche, che chiama rispettivamente *funzione fondamentale* e *funzione potenziale*, ed enuncia il *problema di Dirichlet* e quello *derivato di Dirichlet*.

Cap. II) Definisce le *funzioni potenziali di strato* e *di doppio strato*, e dimostra i soliti teoremi di continuità e discontinuità di queste funzioni, e di esistenza, continuità e discontinuità delle loro

(1) Vedi principalmente: *Les methodes générales pour resoudre les problemes fondamentaux de la physique mathématique*; Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, S. 2ª, T. II, anno 1900

(2) Il tema era il seguente: *dass die in der Abhandlung von Poincaré « La methode de Neumann et le probleme de Dirichlet 1896 », enthaltenen Untersuchungen nach irgend welcher Seite hin wesentlich vervollkommnet werden möchten.*

Digitized by Google

derivate. Dimostra ancora il seguente importante teorema del LIAPONOFF: *se esiste la derivata normale di un doppio strato a densità continua da una faccia della superficie su cui esso è distribuito, tale derivata esisterà anche dall'altra faccia;* ed in fine le seguenti proposizioni: *se il valore di un doppio strato nei punti della superficie è uguale alla sua densità, questa è costante, se è uguale alla sua densità mutata di segno, questa è nulla.*

Questo capitolo riassume, in una esposizione ammirevole e scrupolosa, i principali studii sulle *funzioni potenziali di strato e di doppio strato* del LIAPOUNOFF (l. c.; v. pure: *Sur le principe fondamental de la méthode de Neumann dans le problème de Dirichlet*, Comunications de la Société Mathém. de Kharkow, 1902), del KORN (l. c.: v. pure: *Einige Sätze über die Potentiale von Doppelbelegungen, Munchener Berichten, 1903)* e dello STEKLOFF *(I metodi generali per risolvere i problemi fondamentali della fisica-matematica;* Kharkow, 1901, scritto in russo).

Cap. III[1]). Definisce la serie dei *doppi strati di Neumann* e la serie degli *strati di Robin* e dimostra che, ammessa la sola continuità delle funzioni arbitrariamente date nei punti della superficie, i *doppi strati di Neumann* (i due primi della serie al più esclusi) e gli *strati di Robin* (il primo della serie al più escluso) hanno le derivate parziali del primo ordine finite e continue anche nei punti della superficie stessa. Allora prova col KORN (l. c.) che gli *integrali di Schwarz* relativi a questi *doppi strati* o *strati* (integrali estesi a tutto lo spazio dei parametri differenziali misti di questi *doppi strati* o *strati*), introdotti dal POINCARÉ nella sua cit. Memoria, sono certamente *propri* nella sola ipotesi che le funzioni arbitrariamente date, dalle quali si parte, siano finite e continue. Ciò posto, dimostra agevolmente alcune disuguaglianze, stabilite per la prima volta dal POINCARÉ (l. c.), tra gli *integrali di Schwarz:* e chiude il capitolo introducendo gli *integrali di Schwarz,* che diremo *misti,* relativi a due differenti serie di *doppi strati di Neumann* o di *strati di Robin,* e gli *integrali di Schwarz* formati con un *doppio strato di Neumann* e uno *strato di Robin.*

Cap. IV). I risultati di questo capitolo sono i più importanti. Qui l'A. studia anzitutto le serie di *doppi strati di Neumann* e *di strati di Robin,* ottenuti partendo rispettivamente dalla funzione inversa della distanza di un punto O dello spazio (*polo*) dai punti della superficie e dalla derivata normale di questa funzione. Queste serie possono dirsi rispettivamente: *serie di doppi strati polari di Neumann* e *serie di strati polari di Robin* [1]).

[1]) I *doppi strati polari di Neumann* si presentano anche nel noto metodo di C. NEUMANN per risolvere il cosidetto *problema esterno di Dirichlet;* ma lo studio e l'uso che qui ne fa E. R. NEUMANN sono del tutto nuovi.

Digitized by Google

Evidentemente i valori di ciascuno di questi *doppi strati* o *strati* dipendono (a simiglianza della nota *funzione di Green*), oltre che dai punti dello spazio, dal *polo O* al quale gli stessi *doppi strati polari* o *strati polari* si riferiscono.

Esprime poi la differenza o la somma di due *doppi strati di Neumann* consecutivi (secondo che si tratta di punti del campo finito limitato dalla superficie in considerazione o di punti del campo infinito) per mezzo degli *integrali misti di Schwarz* relativi ai *doppi strati di Neumann* e ai *doppi strati polari di Neumann*, ed ottiene formole analoghe per gli *strati di Robin* (primo teorema fondamentale). Di qui ricava alcune formole che danno un limite superiore dei valori assoluti delle predette differenze o somme, espresso per mezzo di un coefficiente costante dipendente dalla superficie (*costante geometrica*) e dagli *integrali di Schwarz* relativi ai *doppi strati di Neumann*, ed altre formole analoghe per gli *strati di Robin* (secondo teorema fondamentale).

Formole analoghe e queste ottiene il POINCARÉ nella sua cit. Memoria; esse però non hanno tutta la portata di quelle di E. R. NEUMANN.

In questo stesso capitolo l'A. dà nuove ed eleganti espressioni dei *doppi strati di Neumann* e degli *strati di Robin* (terzo teorema fondamentale); e dimostra ancora: α) che gli *strati di Robin* al crescere del loro indice tendono verso una funzione Π, la quale nel campo finito limitato dalla superficie in considerazione è uguale ad una costante Γ, nel campo infinito limitato dalla medesima superficie rappresenta una funzione armonica, che nei punti della superficie prende il valore costante Γ; β) che le differenze o somme (secondo che si tratta del campo finito o del campo infinito) di due *doppi strati di Neumann* consecutivi hanno per limite lo *zero* al crescere del loro indice.

La funzione Π gode delle stesse proprietà della funzione potenziale di uno strato in equilibrio distribuito sulla superficie, fatta astrazione di quella sulla discontinuità delle derivate normali, ed è limite di una serie di strati; però rimane a dimostrare che essa si può rappresentare per mezzo di una funzione potenziale di strato, perchè possa la sua dimostrata esistenza risolvere il *problema fondamentale dell'elettrostatica*.

Cap. V). In questo capitolo l'A. fa uno studio dettagliato dei *doppi strati polari di Neumann* e degli *strati polari di Robin*.

Fra i risultati più importanti che egli ottiene sono da menzionare il *teorema di reciprocità* di cui gode ciascuno dei detti *doppi strati polari* o *strati polari* (perfettamente analogo a quello di *Riemann* per la *funzione di Green*), ed ancora l'effetto prodotto dal metodo

Digitized by Google

della *media aritmetica* sulle successive densità dei *doppi strati polari di Neumann*. Per questi *doppi strati polari* l'A. dimostra che, mentre la funzione (densità del primo *doppio strato polare)* dalla quale si parte è (Cfr. il capitolo IV) l'inversa della distanza del *polo O* dai punti della superficie in considerazione, la densità del *secondo doppio strato polare* coll'avvicinarsi del *polo O* di questa superficie si comporta come il logaritmo di detta inversa, e le densità dei successivi *doppi strati polari* rimangono sempre funzioni finite e continue.

Cap. VI) Questo capitolo è consacrato allo studio delle derivate dei *doppi strati di Neumann* e degli *strati di Robin*. I risultati e i metodi sono analoghi a quelli dei Cap. IV e V.

Cap. VII) I risultati dei capitoli precedenti rappresentano tutto ciò che l'A. ha potuto fare col suo metodo delle *funzioni potenziali polari;* per altro essi risultati non sono sufficienti a dimostrare la convergenza della *serie di C. Neumann* e della *serie di Robin*. Per questa ragione l'A. nel presente capitolo abbandona il suo metodo e ammette senz'altro il *principio di Poincaré*. Coll'intervento di tale principio egli riesce a fare uno studio più profondo dei *doppi strati di Neumann* e degli *strati di Robin*, e a dimostrare finalmente la convergenza delle *serie di Neumann* e *di Robin*.

Come si vede, in questo capitolo l'A. rientra nelle medesime ipotesi fatte da POINCARÉ, KORN e STEKLOFF; ciò non pertanto i nuovi risultati dei capitoli IV, V e VI segnano un vero progresso nella quistione, rispetto ai precedenti lavori dei detti autori.

Mi si presenta qui l'occasione di fare un'osservazione sulla recente dimostrazione, data dallo ZAREMBA (1), del *principio di Poincaré*.

La dimostrazione dello ZAREMBA si fonda essenzialmente sopra un lemma ormai celebre del POINCARÉ (2), il quale è stato dimostrato fin ora dallo stesso POINCARÉ per i soli campi convessi. Per la estensione di tale lemma ai campi non convessi il POINCARÉ fa alcune considerazioni che valgono *soltanto* per la particolarissima classe di campi scindibili in un numero finito di campi convessi; per cui, siccome i campi non convessi considerati dallo ZAREMBA non rientrano nella detta classe particolare, che anzi vi sono esclusi, così si può dire soltanto che la dimostrazione dello ZAREMBA riconduce il *principio di Poincaré* alla dimostrazione per i campi non convessi del *lemma di Poincaré*. Quando quest'ultima dimostrazione verrà data,

(1) *Sur la théorie de l'équation de Laplace et les méthodes de Neumann et de Robin* (Addition); Bulletin international de l'Académie des sciences de Cracovie, Marzo 1901.

(2) *Sur les équations de la physique mathématique* (§ III); Rendic. del Circolo Mat. di Palermo, t. VIII, anno 1894.

(3) Ibid. pag. 79. — vedi pure: American Journal of Mathematics, t. XII.

Digitized by Google

si potrà ritenere dimostrato il *principio di Poincaré* e quindi ancora dimostrata la convergenza delle *serie di C. Neumann* e *di Robin* per i campi non convessi, indipendentemente dalle condizioni poste dal POINCARÉ.

GIUSEPPE LAURICELLA.

F. AMODEO. — *Vita matematica napoletana. Studio storico, biografico, bibliografico. Parte Prima.* Con una tavola di tre ritratti fuori testo e cinque ritratti nel testo. Napoli, F. Giannini, 1905. [Prezzo L. 10].

I quattro capitoli di cui consta il presente volume (1. *Stato delle matematiche a Napoli dal* 1650 *al* 1732; 2. *Dai fratelli Di Martino a Vito Caravelli;* 3. *Nicolò Fergola;* 4. *Gl' istituti di d' istruzione e scienticifi in Napoli intorno al* 1800) vennero pubblicati come altrettante memorie separate negli Atti dell'Accademia Pontaniana di Napoli e segnalati al loro apparire in queste colonne (v. *Bollettino*, t. V, p. 61; t. VI, p. 95; t. VIII, p. 95).

L' A., vivendo in Napoli, ebbe agio di compiere ampie ricerche in quelle biblioteche e così prendere conoscenza diretta delle opere matematiche del periodo che corre dal 1650 alla morte del Fergola e completare o rettificare alcuni particolari relativi.

Nell' attesa della II Parte del lavoro che annunziamo, siaci lecito augurare che l' esempio del Prof. Amodeo venga seguito; che, cioè altri aduni i materiali per la storia delle scienze esatte in altre regioni d' Italia; centri di studio quali Bologna, Pisa, Padova sono ben degni dell' attenzione degli storici; chi ne farà oggetto di ricerca avrà il merito grande di aggiungere qualche pagina all' opera sgraziatamente interrotta di Guglielmo Libri.

G. L.

A. BUCHERER. — *Elemente der Vektor-Analysis. Mit Beispielen aus der theoretischen Physik.* 2. Aufl. Leipzig, Teubner, 1905, 8.°, p. VI+103. [Prezzo del vol. leg. Mk 2. 40].

La II edizione di questo pregevole opuscolo, che dopo breve intervallo segue la I (cfr. *Bollettino*, T. VII, 1904, p. 123), oltre a parecchie correzioni, contiene tre nuovi paragrafi, cioè:

§ 4.° *Osservazioni sulla divisione.*

§ 8.° *Trasformazioni analitiche dirette.*

§ 13.° *I potenziali di Liénard e Wiechert.*

G. L.

Digitized by Google

ALFRED WEGENER. — *Die Alfonsinischen Tafeln für den Gebrauch eines modernen Rechners.* Berlin, Ebering, 1905, 8.°, p. 63, e 1 tav. [Prezzo Mk. 3].

In questa dissertazione inaugurale, presentata all' Università di di Berlino il 1 marzo 1905, il dottor Wegener ha affrontato una questione delle più difficili per gli astronomi, nei quali non è facile trovare competenza paleografica, e neppure la pratica dei metodi e del linguaggio della scienza antica e medioevale. Non è raro che un astronomo eviti di ricorrere ai dati numerici delle tavole solari, lunari e planetarie dell' epoca precopernicana, appunto per il grave sforzo che gli sarebbe necessario ad interpretare il significato spesso escuro e involuto di tali documenti. Poichè, d'altra parte, in molte questioni storiche e cronologiche può essere prezioso il diretto accedere alle fonti, il tentativo di facilitarne la comprensione e l' uso merita di essere incoraggiato e approvato.

Nel caso speciale delle tavole alfonsine, venute alla luce nel cuore dell' età di mezzo (tra il 1250 e il 1270), la difficoltà dell' interpretazione è forse ancor maggiore che per le opere degli Arabi, divulgate nel secolo scorso da dotti orientalisti e interpretate da astronomi valenti. E tanto più si palesa opportuna l' iniziativa del giovane Berlinese, poichè sul vero carattere dell' opera di Alfonso regna ancora molta incertezza. Gli stessi editori del lavoro meglio conosciuto di questo savio re non si sono accorti che i « libros del saber de astronomia » non hanno nulla a fare con le tavole, delle quali l' uso fu generale in Europa sino alla comparsa (nel 1551) delle tavole pruteniche di Erasmo Reinhold.

Lo studio del Wegener, premesse alcune considerazioni generali, si occupa successivamente dell' epoca fondamentale delle tavole, che è il Gennaio 0,0 dell' anno 1 dell' era volgare, delle correzioni dovute alla longitudine geografica, all' equazione del tempo, alla parallasse ed alla precissione degli equinozi. Esamina quindi la teoria planetaria alfonsina, fondata sull' *Almagesto*, e dà un cenno preciso sull' uso delle varie tavole, del Sole, della Luna, dei singoli pianeti, e di quelle che servono a tener conto dei movimenti in latitudine. L' importante monografia si chiude con un utilissimo elenco delle espressioni tecniche, con le corrispondenti in uso presso gli astronomi moderni, e con le tavole destinate a facilitare l' applicazione numerica. Sarebbe desiderabile che anche in Italia, dove lo Schiaparelli ha coltivato con tanta competenza e genialità le ricerche sulla storia della scienza, e dove recentemente il Nallino ha compiuto la monumentale opera su Albategno, l' attenzione dei giovani studiosi fosse chiamata sopra un campo severo sì, ma fecondo di indagini. FRANCESCO PORRO.

Digitized by Google

GUSTAV WERTHEIM. — *Anfangsgründe der Zahlenlehre.* Braunschweig, Vieweg Sohn, 1902, p. XII+428 [Prezzo Mk. 9].

L'autore troppo presto rapito alla scienza, giunse appena in tempo a compiere questo suo ultimo lavoro. È un'opera destinata non ai soli matematici, ma a tutte le persone colte che desiderano gustare le bellezze e le armonie dei numeri.

Nessun'altra parte della matematica, come questa ammirevole teoria, permette di condurre così rapidamente i principianti agli estremi confini della scienza, sulla soglia dell'ignoto.

— Vi sono infinite coppie di numeri primi la cui differenza sia 2?

— Ogni numero pari è la somma di due numeri primi?

— Vi sono infiniti numeri primi della forma $2^n + 1$?

— Ogni numero primo della forma $4n - 1$ è esso della forma $p + 2q$, dove p e q sono numeri primi della forma $4n + 1$?

Sono domande il cui enunciato può essere ben capito da un studente di ginnasio, ma a cui nessuno oggi sa ancora rispondere. Da Goldbach, da Lagrange, da Eisenstein in poi, molti matematici sommi non hanno saputo dietro a questi interrogativi porre un *sì* o un *no*.

Le teorie che l'autore espone in questo suo libro: divisibilità dei numeri (p. 1-63); congruenze e resti (p. 64-84); congruenze di primo grado (p. 85-133); congruenze di grado superiore (p. 134-163); frazioni continue e loro applicazioni aritmetiche (p. 164-226); residui di potenze per moduli primi (p. 227-267) e composti (p. 268-316); congruenze di secondo grado (p. 317-400), sono il frutto degli sforzi di molte generazioni.

Queste teorie hanno tutte, più assai delle altre parti della matematica, questo singolare carattere che non si riesce a cambiare la forma di esposizione senza enorme fatica e spesso con scarsi risultati. Ancora oggi, come per Gauss, come per Euclide le più semplici proposizioni dell'aritmetica dei numeri interi (ad es.: Se un numero quadrato divide un altro quadrato, la base del primo divide quella del secondo; — se un numero primo divide il prodotto di due fattori, divide uno di essi, ecc.) sono intimamente connesse alle misteriose proprietà dei primi enti che si incontrano fin da principio: massimo comun divisore, minimo comune multiplo, numeri primi tra loro, ecc. Tanto che questa stabilità di forma ha spinto matematici sommi a pensare (come ci riferisce Darboux di Hermite nella *Revue du Mois*, n. 1, p. 46) « que les nombres et les fonctions de l'analyse ne sont « pas le produit arbitraire de notre esprit, qu'ils existent en dehors « de nous avec le même caractère de nécessité que les choses de la « réalité objective et que nous les rencontrons, ou les decouvrons et « les étudions de la même manière que les physiciens, les chimistes, « les zoologistes, ecc. »....

Digitized by Google

Il volume elegante, pensato e scritto con amore, è arricchito dai ritratti dei quattro grandi aritmetici: Fermat, Euler, Lagrange, Gauss.

L'erudizione sicura e precisa dell'Autore rende il libro assai interessante. Ogni volta che gli è stato possibile — la ricca città di Francoforte (dove l'A. viveva) sembra rassomigli abbastanza alla ricca Genova nella povertà delle sue biblioteche in libri di matematica — l'A. è sempre ricorso ai testi originali dei libri citati.

Adatti esercizi compaiono qua e là, e pongono alla prova la sagacia del lettore.

— Quali sono i numeri interi e positivi che si possono scrivere come differenza di due quadrati?

La facile risposta che l'A. lascia a chi legge, ed è: i numeri della forma $4n+2$, invoglia subito alla ricerca dei numeri che si possono scrivere come somma di due quadrati.

Sono i numeri che contengono i loro fattori primi della forma $4n-1$ ad una potenza pari.

La risposta a questa seconda domanda non è più tanto semplice. È stata data per la prima volta da Albert Girard (Oeuvres de Simon Stevin, Leiden, 1633), e le *ragioni* della risposta sono state pubblicate soltanto un secolo dopo da Eulero. (l'A. le espone nel § 61 p. 189).

In vari luoghi il nostro A. pone in luce il singolare carattere della teoria dei numeri, consistente nel valido aiuto che le apportano teorie ad esse in apparenza estranee (p. es. il calcolo infinitesimale e la geometria). Così appaiono gli enunciati (non le dimostrazioni complicatissime e tortuose) delle due proposizioni di Legendre (1) e di Bertrand:

— In ogni progressione aritmetica in cui il primo termine sia primo colla ragione, vi sono infiniti numeri primi.

— Se $2a > 7$, allora tra $2a-2$ ed a c'è almeno un numero primo.

Si saprà un giorno dimostrarle senza ricorrere ai potenti strumenti adoperati da Lejeune Dirichlet e da Tchebychef?

---

(1) Veramente il primo scopritore di questo teorema è Eulero. Il passo essendo poco noto, lo riporto qui appresso. EULERI *Opuscola analytica*, Petropolis 1783, t. 2 p. 241:

« Quoniam porro numeri primi praeter binarium quasi a natura in duas classes distinguuntur prout fuerint vel formae $4n+1$, vel formae $4n-1$,... series reciprocae ambae erunt pariter infinitae, *id quod etiam de omnibus speciebus numerorum primorum est tenendum*. Ita si ex numeris primis ii tantum excerpantur, qui sunt formae $100n+1$ cuiusmodi sunt 101, 401, 601, 701, etc. non solum multitudo eorum est infinita, sed etiam summa huius seriei ex illis formatae, scilicet $\frac{1}{101}+\frac{1}{401}+\frac{1}{601}+$ etc., etiam est infinita ».

Digitized by Google

. Opportunamente, dei teoremi più importanti l'A. dà varie dimostrazioni. Così del teorema di Wilson egli da oltre alle dimostrazioni di Lagrange e di Gauss, quella meno nota di Eisenstein (p. 117) di sapore Euleriano.

Della legge di reciprocità di due numeri primi riproduce (p. 422) la curiosa rappresentazione grafica data da A. Matrot. Tra le dimostrazioni notevoli di essa dispiace di non veder citata (p. 361) quella così semplice e suggestiva di Angelo Genocchi.

Ma uno dei pregi più notevoli del libro è la ricchezza degli esempi numerici che seguono ogni proposizione, e permettono di apprezzarne quasi la portata, nel mentre sono una guida preziosa per lo studioso.

Da questo punto di vista è indubbiamente superiore agli altri che lo hanno preceduto e coi quali ha qualche somiglianza, (p. es. la *Théorie des nombres* di E. Lucas).

In una breve recensione è difficile trasmettere al lettore il gusto che si può provare leggendo libri di questo genere.

Ma a coloro che incominciando a studiare la matematica trovassero poco interesse in queste ricerche, mi sembra opportuno additare ancor oggi l'osservazione di Eulero:

« Non dubito fore plerosque, qui mirabuntur, me in huiusmodi « questionibus evolvendis, quas nunc quidem summi geometrae aver- « sari videntur, operam consumere; verum equidem fateri cogor, me « ex huiusmodi investigationibus tantumdem fere voluptatis capere, « quam ex profundissimis Geometriae sublimioris speculationibus. Ac « si plurimum studii et laboris impendi in quaestionibus gravioribus « evolvendis, huiusmodi variatio argumenti quamdam mihi haud ingra- « tam recreationem afferre solet ». (N. C. t. 17, pro anno 1772 (pubbl. 1773), p. 25).

GIOVANNI VACCA.

R. SCHRODER. — *Die Anfangsgründe der Differentialrechnung und Integralrechnung. Für Schüler von höheren Lehranstalten und Fachschulen sowie zum Selbstunterricht.* Mit zahlreichen Übungsbeispielen und 27 Figuren im Text. Leipzig, Teubner, 1905, 8.°, p. VII+131. [Prezzo del vol. leg. Mk. 1.60].

È generalmente noto che in Germania ferve attualmente vivissima la discussione sull'essere o meno opportuna l'introduzione nell'insegnamento medio dei fondamenti dell'analisi infinitesimale. F. Klein, uno dei più convinti sostenitori dell'introduzione, riconosceva non ha guari (*Neue Beiträge zur Frage des mathem. und phys. Unterrichts*, I, p. 28) che al trionfo delle sue idee faceva ostacolo la non esistenza in Germania di un trattato di calcolo differenziale ed integrale atto

Digitized by Google

a fungere da libro di testo in un liceo. Ora il volume che annunziamo aspira, se non pretende, a colmare tal vuoto esistente nella letteratura matematica tedesca, ed ha al proprio attivo di essere sorto dall'insegnamento dell'autore (« Aus der Praxis dieses Unterricht ist das Buch erwachsen », dichiara infatti, l'autore).

Lo Schröder suppone noti ai propri lettori l'algebra elementare, sino al teorema del binomio, per esponente qualunque, ed al calcolo del limite (e) di $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$, nonchè gli elementi della geometria analitica piana. I metodi da lui adottati sono rigorosi, ma non prettamente aritmetici; al contrario con ragione egli fa largo uso di rappresentazioni geometriche. Egli si attiene alla separazione netta del calcolo differenziale dall'integrale. Quello divide in tre quattro capitoli aventi i titoli seguenti: 1. *Concetto e proprietà delle derivate.* 2. *Applicazione del calcolo differenziale alle espressioni di forma indeterminata.* 3. *Applicazione del calcolo differenziale alla ricerca dei massimi e minimi.* 4. *Applicazione del calcolo differenziale allo studio delle curve piane.* Al calcolo integrale dedica invece tre capitoli intitolati risp. 5. *Concetto d'integrale e metodi d'integrazione.* 6. *Applicazione del calcolo integrale alla quadratura delle curve piane.* 7. *Applicazione del calcolo integrale alla rettificazione delle curve piane.* — Un ultimo capitolo è dedicato all'applicazione dell'analisi infinitesimale alla meccanica; l'opportunità di tale applicazione riesce evidente riflettendo che, mentre da un lato, la scienza del moto offre notevoli illustrazioni dei concetti di derivata prima o seconda, queste sono esclusivamente capaci di dare un'idea esatta di velocità e di accelerazione.

Il giudizio definitivo sopra il libro in discorso verrà naturalmente pronunciato dai professori che se ne serviranno; intanto sia a noi concesso dichiarare che a noi sembra raggiungere lo scopo pel quale fu scritto (ed a formarci tale opinione non è estranea la bella collezione di esercizi di cui è ricco). Un solo appunto siaci concesso. A pag. 13 l'A. trova la derivata di una potenza a base qualunque, applicando il teorema generale del binomio; nella pag. seguente ne deduce la derivata di un radicale qualsivoglia. Ora a noi pare sarebbe stato preferibile calcolare prima la derivata di $y = x^m$ per m intero mediante il teorema del binomio per esponente intero, e di dedurre i casi di m negativo ($= -n$) o frazionario $\left(=\frac{1}{p}\right)$, servendosi della regola di differenziazione delle funzioni implicite applicata alle equazioni $x^n y = 1$, $y^p = x$.

G. L.

Digitized by Google

F. Severi. — *Complementi di geometria proiettiva. Raccolta di oltre 300 problemi colle relative soluzioni.* Bologna, Zanichelli, 1906, 8.°. p. VI + 127 [Prezzo L. 10].

Poche volte si può, a parer nostro, dare lode completa di piena utilità scolastica ad un libro come quello al quale adesso ci proponiamo di accennare con qualche rapido dettaglio. Noi non possiamo a meno di raccomandarlo (con quella poca autorità che viene dal solo desiderio di giovare a chi studia) a quelli dei nostri scolari universitari che avendo già seguito, con profitto, un corso di Geometria proiettiva intendono rafforzare le cognizioni apprese, allargandone la base e addestrando la mente in utili e geniali esercitazioni.

Il piano del libro si svolge parallelamente al ben noto trattato di Enriques di Geometria proiettiva, richiamandone ad ogni saliente occasione i punti principali. Esso è diviso in sette capitoli suddivisi ciascuno in varii paragrafi.

Il primo capitolo, dedicato a semplici applicazioni del metodo di proiezioni e sezioni e ai primi problemi su costruzioni lineari, contiene tre paragrafi di cui il 1° è particolarmente destinato a trasformazioni di figure piane mediante la proiezione centrale. Sono a notarsi, nel secondo, le considerazioni inerenti alla scala armonica e al centro delle medie armoniche. L'argomento è tanto importante quanto troppo spesso dimenticato nei corsi ordinari di Geometria proiettiva. È dunque ben giusto che il nostro A. gli abbia consacrato varie pagine mettendo bene in luce, fra altro, un teorema che serve essenzialmente ad attuare una nota idea di De-Paolis inerente al riferimento dei punti di una retta ai valori di un parametro. Il paragrafo si chiude con costruzioni sui tetraedri desmici, o fasciali: è questo uno dei pochi argomenti di geometria dello spazio trattati dal nostro A. il quale si limita a fare principalmente (se non essenzialmente) della geometria piana. Il paragrafo terzo tratta delle proprietà metrico-proiettive delle figure considerando in special modo le cosidette espressioni metrico-proiettive di cui i birapporti non sono che casi particolari.

Il capitolo II si compone di due paragrafi (il 4° e il 5°) di cui il 4° è destinato alle applicazioni più dirette delle costruzioni fondamentali di forme proiettive. È a segnalarsi un esempio di corrispondenza trilineare, un metodo pratico tanto ingegnoso quanto semplice per costruire mediante un movimento continuo le coppie di raggi corrispondenti in una proiettività fra due fasci data per mezzo di due terne di elementi corrispondenti, e in ultimo una notevole proposizione di geometria dello spazio dalla quale discende immediatamente il teorema di Pohlke fondamento dell'assonometria obliqua in Geometria descrittiva. Il paragrafo 5° (secondo di questo capitolo) è consacrato

Digitized by Google

ai problemi di secondo grado e come essi si riducono a determinare i punti uniti di una proiettività fra forme di prima specie, così il nostro A. espone prima due costruzioni per tale determinazione: una è quella solitamente usata e che dipende dall'asse di collineazione di due serie proiettive di punti di una stessa circonferenza: l'altra meno usata, ma più elementare (perchè non ricorre alle serie suddette) riconduce il problema in ogni caso a quello in cui la sede della forma è una punteggiata e si serve dei punti limiti per accertare l'esistenza dei punti uniti della proiettività e per costruirli. Questa seconda costruzione ha anche il pregio di mettere bene in evidenza, secondo le vedute dell' A. il riscontro geometrico-analitico fra la risoluzione di un problema grafico di 2° grado e quella di una equazione di 2° grado ad una incognita. L' A. passa poi ad applicare le due costruzioni sopra accennate a risolvere varie questioni grafiche di 2° grado nelle quali fa rientrare ad es., i tre problemi anticamente detti della sezione di ragione, della sezione di spazio e della sezione determinata. Il paragrafo termina con l'esposizione di un problema tipico per l'applicazione del metodo di falsa posizione.

Si passa così al capitolo III diviso in due paragrafi (il 6° e il 7°) dei quali uno particolarmente interessante (il 6°). Esso ci apprende, fra altro, una elegante proprietà dell'asse di collineazione di due punteggiate proiettive complanari, per la quale tale asse può riguardarsi come il luogo geometrico di un punto da cui le due punteggiate vengono proiettate secondo un fascio involutorio di raggi. Viene poi definita la involuzione unita di una proiettività tra forme di 1ª specie situate nella medesima sede. Il concetto e l'ufficio di questa involuzione è così importante, che a parer nostro non dovrebbe tacersene in alcun corso di Geometria proiettiva, almeno nel caso ovvio delle proiettività iperboliche. Nel caso ellittico è noto che il presentare tale involuzione non è scevro di difficoltà didattiche per chi vuole prescriversi una trattazione puramente sintetica: orbene queste difficoltà evita il nostro A. mediante ingegnose considerazioni metriche. Vengono, infine al paragrafo, le proiettività-potenze di altre proiettività. L'A. ne fa un'applicazione al caso delle proiettività cicliche e una più importante alla risoluzione lineare approssimata dei problemi di 2° grado, arrivando alla conclusione che ogni problema grafico di tale specie si può risolvere con la sola riga con quell' approssimazione che si desidera. Il paragrafo 7 (secondo dell'attuale capitolo) contiene una nuova dimostrazione e applicazioni varie del cosidetto teorema del quadrangolo, inerenti alla involuzione che esso segna sopra una retta mediante le tre coppie di lati opposti: l'A. si serve di questo teorema per stabilire, fra altro, il concetto e la esistenza di coppie di tetraedri di Mobius.

Digitized by Google

Il capitolo IV si riferisce a forme di seconda specie proiettive e anch'esso si divide in due paragrafi (l'8° e il 9°) dei quali l'8° è destinato a omografie generiche e omologiche tra forme di 2ª specie e il 9° riguarda specialmente le polarità. Nel paragrafo 8° è da notare la decomposizione di ogni omografia fra due piani sovrapposti in successive omologie e il concetto della invarianza di birapporto d'area per trasformazioni collineari. Seguono degli esercizi intorno alle omologie piane e a casi particolari metrici di esse, ai quali è degno coronamento una notevole proposizione intorno al sistema di tre cerchi e la risoluzione dell'ormai classico problema di costruire un cerchio tangente a tre cerchi dati. Come esempio di corrispondenza biunivoca, ma non collineare, viene presentata la inversione per raggi vettori reciproci facendo vedere principalmente che essa è una trasformazione conforme e servendosene poi per dimostrare il teorema fondamentale della cosidetta geometria del compasso (ogni problema risolubile con la riga e col compasso può risolversi col solo compasso, purchè s'intenda che ogni retta sia ottenuta quando se ne siano costruiti due punti). Il paragrafo 9° riguardante, come abbiamo detto, le polarità nelle forme di 2ª specie, considera varie proposizioni che forse acquisterebbero maggior risalto se fosse messa in evidenza (quando si può) la conica fondamentale della polarità. Ma la cura posta dall'A. nel procedere parallelamente al libro di Enriques gli vieta ancora di parlare delle coniche. Si fa solo eccezione per il cerchio rispetto al quale è definita non solo la polarità, ma anche l'antipolarità ponendo così il fondamento precipuo dei problemi di ortogonalità, col metodo della proiezione centrale in Geometria descrittiva. Il paragrafo si chiude con una notevole proposizione sulla legge di dualità per le espressioni metrico-proiettive.

Il capitole V è interamente dedicato alle coniche ed è diviso in tre paragrafi (il 10°, l'11°, il 12°). Il primo di essi considera la polarità rispetto ad una conica e la generazione proiettiva delle coniche. Dopo alcune proposizioni più comuni su queste curve, l'A. determina la condizione perchè la rete di coniche che hanno un dato triangolo antopolare contenga un circolo, o ne contenga infiniti, la condizione analitica perchè 6 punti, o 6 rette appartengano a una stessa conica. e varii teoremi di chiusura inerenti a coniche. Viene poi la generazione proiettiva delle coniche e nel caso che si tratti della conica inviluppata dalle rette che congiungono punti corrispondenti di punteggiate proiettive, è a notarsi una elegante proprietà del centro: esso è il punto medio del segmento che unisce i punti limiti delle due punteggiate. È anche svolta in questo paragrafo la descrizione organica di Newton. Nel paragrafo successivo (secondo di questo capitolo) sono esposte varie dimostrazioni del teorema di Pascal: note-

Digitized by Google

vole fra tutte quella che in origine è dovuta a Dandelin e che ricorre, per lo scopo, a una quadrica rigata passante per la conica. Il § 12 è dedicato al teorema di Desargues e alle molte sue conseguenze. Sono notevoli alcune estensioni in vario senso del teorema suddetto, altre particolari proposizioni sui fasci di coniche e sopratutto delle eleganti esercitazioni sulle coniche osculatrici. Il paragrafo termina con un cenno sulle trasformazioni quadratiche (l'unica cosa che forse poteva essere tralasciata senza diminuire il pregio didattico del libro).

Il capitolo VI tratta delle serie proiettive su coniche e delle eventuali intersezioni di tali curve. L'A. è così ricondotto a considerazioni dettagliate sulla risoluzione grafica dei problemi geometrici più di quelle già fatte per l'addietro e giunge quindi alla importante conclusione che tutti i problemi determinati risolubili con la riga e col compasso si possono anche risolvere servendosi della riga e di un arco di circolo di dato centro, oppure con l'uso della sola riga a due bordi e di lunghezza finita. La proiettività fra punti di una stessa conica suggerisce all'A. la considerazione dell'inviluppo delle rette che uniscono punti corrispondenti e siccome quest'inviluppo è una conica bitangente alla data, così si presenta naturale, a questo punto, lo studio del sistema di due coniche bitangenti. Importanti poi, fra altro, seguono le formule per l'area di un ellisse, di un segmento parabolico e di un settore ellittico, la costruzione dell'ellisse per moto continuo, la condizione affinchè 4 punti di un ellisse appartengano a un cerchio e alcuni teoremi sopra circoli osculatori ad ellissi ecc., il paragrafo termina con nuove considerazioni intorno a coniche fra loro osculatrici e a contatto quadripunto e conseguentemente sui fasci di coniche che hanno 3, o 4 punti base infinitamente vicini, ai quali fasci viene esteso il teorema di Desargues. Il paragrafo 14° riguarda i problemi di 3° e 4° grado. Come preparazione il nostro A. comincia dallo stabilire il teorema fond.le sui punti comuni a due coniche, dopo di che egli dimostra la possibilità di risolvere colla riga e col compasso ogni problema di 3° e 4° grado purchè sia tracciata sul foglio una conica che non sia un circolo. Si presenta quindi così a luogo opportuno la risoluzione di due problemi classici: la duplicazione del cubo e la trisezione dell'angolo, con i quali problemi ha fine il paragrafo ed il capitolo.

L'ultimo capitolo (il VII), composto di un solo paragrafo (il 15°), è completamente dedicato alle proprietà focali delle coniche e si inizia applicando tali proprietà alla costruzione per moto continuo delle tre specie di coniche. Seguono poi le cosidette involuzioni focali con le quali si potrebbe sviluppare tutta la teoria dei fuochi (in modo però meno semplice di quello che faccia il trattato di Enriques seguito dal nostro A.). Fra i molti e svariati problemi che seguono, ci piace di segnalare

Digitized by Google

quello di costruire una conica dati tre punti e un fuoco (con le utili osservazioni sulla specie delle quattro coniche che risolvono il problema), il principio che permette di ridurre ogni problema relativo a coniche ad un problema più semplice relativo a circoli, quando fra i dati figuri un fuoco. Di ciò che rimane è specialmente interessante la costruzione del luogo geometrico dei centri dei circoli tangenti ad altri due cerchi dati, da cui si deduce una nuova costruzione del cerchio tangente ad altri tre cerchi dati e infine le considerazioni inerenti alle coniche confocali, il che dà modo all'A. di presentare la strofoide come il luogo geometrico dei punti di contatto delle tangenti tirate da un punto P alle coniche di un sistema omofocale. Il libro termina con la considerazione dei coni rotondi che proiettano una data conica.

Notizie storiche, sobrie, ma esatte, inerenti ai punti di maggiore interesse, sono distribuite nel libro con sagace opportunità, in guisa da alleggerire e variare la lettura come generalmente non si suol fare in trattati di questa specie. Purtroppo le cognizioni storiche, nei libri di matematica sono o trasandate, o affatto neglette!

L'esame dell'opera è finito e il nostro giudizio è già espresso al principio di queste pagine. Volendo indugiarsi in qualche cenno critico si può osservare che il libro sarebbe apparso più completo se avesse esteso la trattazione anche a qualche altro argomento che di solito è svolto nei corsi ordinari di Geometria proiettiva: ad es. la teoria delle quadriche, la proiettività fra forme di terza specie ecc.. Sarebbe stato desiderabile anche una maggiore estensione nella geometria della stella. Nella geometria del piano pure qualche altra questione meritava di essere utilmente trattata. Ad es. si poteva fare menzione della cosidetta conica dei 14 punti inerente a un quadrilatero cioè la conica invariante rispetto alle 24 collineazioni piane che trasformano il quadrilatero in sè stesso: evitando concetti che provengono da teorie più elevate, tale conica può individuarsi come quella che taglia ciascun lato nei punti uniti della proiettività ciclica di 3° ordine che permuta i tre vertici su quel lato ecc., ecc. E così accanto a questa conica, poteva prender posto tutto ciò che la collega, in modo elementare, con la geometria del quadrilatero e del suo quadrangolo polare..... Ma queste scarse critiche sono ben poca cosa di fronte alla fresca genialità del libro al quale auguriamo fortuna pari al merito.

E. CIANI.

Digitized by Google

M. Salvadori. — *Esposizione della teoria delle somme di Gauss e di alcuni teoremi di Eisenstein.* Tesi presentata alla Facoltà di Scienze dell'Università di Friburgo (Svizzera) per ottenere il grado di Dottore in Scienze Matematiche. Pisa, Nistri, 1904, 8°, p. 116.

Questa Memoria ha per iscopo di esporre sistematicamente la teoria delle *somme di Gauss*, col qual nome si designano le somme della forma:

$$\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{2(\mu)-1} e^{-\frac{k^2\lambda\pi i}{\mu}} = G(\lambda,\mu),$$

dove λ, μ sono numeri interi positivi o negativi.

Il Cap. I ci dà la dimostrazione della *legge di reciprocità* delle somme di Gauss:

$$G(\lambda,\mu)\cdot\sqrt{\frac{\lambda i}{\mu}} = G(-\mu,\lambda)$$

secondo Dirichlet-Kronecker e secondo Cauchy-Lerch, e l'espressione di $G(\lambda,\mu)$ mediante integrali curvilinei dovuta a Kronecker.

Nel Cap. II si stabiliscono le proprietà aritmetiche delle somme di Gauss, e se ne deduce una dimostrazione della legge di reciprocità di Legendre che viene estesa ai simboli di Jacobi; si ottengono poi varie semplificazioni e generalizzazioni coll'uso del concetto di *discriminante*, nome con cui Kronecker indica un numero D che soddisfa ad una delle congruenze:

$$D \equiv \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} \pmod 4.$$

Il Cap. III è dedicato all'esposizione del metodo di Gauss per esprimere la somma di Gauss $G(\lambda,\mu)$ mediante un prodotto di seni di archi equidifferenti.

Infine nel Cap. IV, facendo uso di un simbolo introdotto da Schering, si stabiliscono cinque teoremi enunciati da Eisenstein (Crelle's J. XXVII) e dimostrati poi da Stern e da Tardy.

G. Vivanti.

O. Biermann. — *Vorlesungen über mathematische Näherungsmethoden.* Braunschweig, Vieweg und Sohn, 1905, 8°, p. X + 227, c. 35 fig. [Prezzo Mk. 8; leg. 8,80].

Quest'opera, insieme a quella di Lüroth, di cui si è già fatto cenno in questo *Bollettino* (T. IV, 1901, p. 82), risponde al bisogno sempre più sentito di dare un assetto scientifico anche alle parti pratiche della matematica. I problemi che in essa l'autore si propone sono

Digitized by Google

tre, e cioè: *a*). Calcolare l'errore massimo del risultato d'un'operazione conoscendo quello degli elementi su cui si opera; *b*). Trovare il massimo errore di questi compatibile con un dato grado di precisione del risultato; *c*). Vedere come si debba condurre un calcolo per ottenere col minimo lavoro un dato grado di precisione. Egli esamina prima (C. I) le operazioni aritmetiche, poi passa (C. II) alla serie di Taylor ed alla sua applicazione al calcolo dei logaritmi, indi (C. III) alla risoluzione grafica e numerica delle equazioni algebriche e trascendenti e dei sistemi d'equazioni, infine (C. IV) ai metodi d'interpolazione, che tratta con molta larghezza, e che applica (C. V) al calcolo approssimato delle aree e dei volumi. Un ultimo capitolo (C. VI) è dedicato ad alcune macchine aritmetiche (regolo, integrafo, planimetri); segue una brevissima appendice sulla teoria dei minimi quadrati.

G. VIVANTI.

O. STOLZ u. J. A. GMEINER. — *Einleitung in die Funktionentheorie.* Zweite umgearbeitete und vermehte Auflage der von den Verfassern in der « Theoretischen Arithmetik » nicht berücksichtigten Abschnitte der « Vorlesung über allgemeine Arithmetik » von O. Stolz. 2. Abtlg. Leipzig, Teubner, 1905, 8.°, p. VIII + 212-598 [Prezzo del vol. leg. Mk. 9].

Della prima parte di quest'opera abbiamo già parlato (*Bollettino*), VIII, 1905, p. 85). Qui ci limitiamo a dare gli argomenti dei capitoli di questa seconda parte, aggiungendo soltanto che ciascuno di essi è seguito da una numerosa serie di esercizi (circa 120 in tutto): C. VI. Criteri di convergenza e divergenza delle serie; modo di comportarsi d'una serie di potenze sulla circonferenza di convergenza. C. VII. Concetto di funzione analitica secondo Weierstrass. C. VIII. Le funzioni circolari per argomenti complessi. C. IX. Prodotti infiniti. C. X, XI. Frazioni continue finite ed infinite.

G. VIVANTI.

P. BACHMANN. — *Allgemeine Arithmetik der Zahlenkörper.* Leipzig, Teubner, 1905, 8.°, p. XXII + 548 [Prezzo Mk. 16, leg. Mk. 17].

È la quinta parte del grande trattato sulla teoria dei numeri al quale l'illustre autore attende da ben tredici anni, ed è dedicata alla esposizione della teoria generale dei numeri algebrici secondo il metodo di Dedekind. Partendo dal concetto di *numero algebrico*, l'autore svolge nel C. I i fondamenti della teoria dei *corpi* formati con tali numeri; passa poi (C. II) a trattare dei *moduli di numeri*, nome col

Digitized by Google

quale, come è noto, si designa un insieme di numeri tale, che la somma e la differenza di due elementi qualunque dell'insieme appartenga all'insieme stesso. Un modulo *finito*, cioè costituito dall'insieme dei numeri $\mu_1 u_1 + \mu_2 \mu_2 + \ldots + \mu_n u_n$, dove $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ sono numeri fissi, e $u_1, u_2, \ldots u_n$, prendono tutti i possibili valori razionali interi, può considerarsi come l'insieme dei numeri *divisibili* per il *sistema di divisori* $[\mu_1, \mu_2, \ldots, u_n]$; l'autore studia particolarmente il caso di un sistema della forma [p. flxs], dove p. è un numero primo, flxs una frazione intera e coefficienti interi (C. III). Nel C. IV. si intraprende lo studio dei numeri algebrici interi, e si mette in chiaro la differenza tra la teoria di questi numeri e quella dei numeri ordinari e la conseguente necessità di limitarsi allo studio dei numeri interi appartenenti ad un determinato corpo algebrico. Però anche qui manca la perfetta corrispondenza coi numeri ordinari, giacchè un numero è generalmente decomponibile in fattori primi in più modi; a ristabilire la completa uniformità giova l'introduzione del concetto di *ideale* dovuto a Dedekind. La teoria degli ideali viene applicata prima (C. V) al caso di un corpo quadratico, poi sviluppata in tutta la sua generalità nei capitoli successivi; in particolare il C. VI tratta dell'aritmetica degli ideali, il C. VII dei divisori del discriminante, il C. VIII delle unità, il C. IX del calcolo del numero delle classi, il C. X delle forme decomponibili in fattori lineari, il C. XI dei corpi contenuti in altri corpi. L'ultimo capitolo (C. XII) è dedicato allo studio dei *corpi dei Galois*; e l'autore osserva che con questo esce soltanto in apparenza dal suo programma, che è di sviluppare la teoria *generale* dei corpi algebrici, giacchè, sebbene i corpi di Galois sieno corpi di natura speciale, può tuttavia per ogni corpo algebrico trovarsi un corpo di Galois che lo contiene, quello cioè composto del corpo dato e di tutti i suoi coniugati.

Pur mantenendosi fedele al metodo di Dedekind, l'autore non trascura di farci conoscere le ricerche anche più recenti compiute in altri indirizzi; sicchè la lettura della sua opera vale a darci un'idea chiara ed esatta dello stato attuale della teoria dei numeri algebrici.

G. Vivanti.

Annuaire pour l'an 1906, publié par le Bureau des Longitudes. Avec des Notices scientifiques. Paris, Gauthier-Villars, 1905, 16°. [Prezzo fr. 1.50].

Oltre le rubriche consuete, il presente volume contiene un esteso ed utilissimo articolo di G. Bigourdan intitolato: *Les éclipses de soleil. Instruction sommaire sur les observations que l'on peut faire*

Digitized by Google

pendant ces éclipses. Seguono due articoli, uno dello stesso Bigourdan, l'altro del Janssen, sulle osservazioni compiute durante l'eclisse solare del 30 Agosto 1905.

G. L.

F. G. M. — *Cours de géométrie élémentaire, suivi d'un recueil d'exercises.* Tours, Mame; Paris, Poussielgue, 1899, p. XII+524.

Indice.

Preliminari: I. Il metodo delle matematiche. II. Applicazione dei numeri alle grandezze.

Generalità.

Libro I. — I punti e le rette di un piano. - Cap. 1. Sistema di due punti o di due rette. Cap. 2. Il triangolo. Cap. 3. Il quadrilatero. Cap. 4. I poligoni in generale. Cap. 5. Lunghezza di una curva.

Libro II. — La circonferenza. - Cap. 1. Centro e diametri. Cap. 2. Archi circolari. Cap. 3. Posizioni scambievoli di un punto ed una circonferenza. Cap. 4. Posizioni scambievoli di una retta ed una circonferenza. Cap. 5. Posizioni scambievoli di due circonferenze. Cap. 6. Uso del cerchio per la misura degli angoli. Cap. 7. Costruzioni geometriche. Cap. 8. Spostamento di una figura piana.

Libro III. — Le figure simili. - Cap. 1. Posizione di un punto su di una retta. Cap. 2. Relazioni metriche fra segmenti rettilinei. Cap. 3. Luoghi geometrici. Cap. 4. Problemi sopra i segmenti rettilinei. Cap. 5. Omotetia. Cap. 6. Similitudine. Cap. 7. Poligoni regolari. Cap. 8. Lunghezza della circonferenza.

Libro IV. — Le aree piane. - Cap. 1. Misura delle aree. Cap. 2. Relazioni metriche fra aree. Cap. 3. Problemi sulle aree.

Libro V. — La retta ed il piano nello spazio. - Cap. 1. Posizioni relative di rette e piani. Cap. 2. Spostamento nello spazio. Cap. 3. Simetria nello spazio. Cap. 4. Angoli solidi.

Libro VI. — Proprietà dei poliedri. - Cap. 1. Volume dei poliedri. Cap. 2. Omotetia nello spazio. Cap. 3. Similitudine dei poliedri.

Libro VII. — I tre corpi rotondi. Preliminari. - Cap. 1. Il cilindro. Cap. 2. Il cono. Cap. 3. La sfera.

Libro VIII. Le curve usuali. Preliminari. - Cap. 1. L'ellisse. Cap. 2. La parabola. Cap. 3. L'iperbola. Cap. 4. Le sezioni coniche. Cap. 5. L'elica.

Questioni proposte.

La geometria del triàngolo.

Lessico che richiama il significato dei principali neologismi usati nella geometria del triangolo.

Digitized by Google

SCHLOEMILCHS *Handbuch der Mathematik.* 2. Aufl. herausgegeben von R. HENKE und R. HEGER. I. Band: Elementarmathematik, mit 321 Figuren (p. XII + 611). II. Band: Höhere Mathematik, I. Teil, mit 281 Figuren und 12 Tafeln (p. VII + 765). III. Band: Höhere Mathematik, II. Teil, mit 94 Figuren und 20 Tafeln (p. VII + 622), Leipzig, Bart, 1904, 8° gr. [Prezzo Mk. 60].

Questa eccellente opera apparve negli anni 1879-81 come ingrediente di una « Enciclopedia delle Scienze naturali ». Prima di venire una seconda volta presentata al pubblico fu totalmente rifatta; così divenne di tale mole da rendere necessaria l'aggiunta di un nuovo volume ai due che prima la costituivano, così divenne un ottimo *vade-mecum* per tutti coloro che hanno bisogno di servirsi della parte generale dell'odierno scibile matematico. Il I vol. è diviso in quattro libri, dedicati risp. all'algebra (sino alle serie, ai determinanti, ed alle equazioni di grado superiori inclus.), la planimetria, la stereometria e la trigonometria (piana e sferica). Il II volume abbraccia gli elementi della geometria descrittiva, la geometria analitica del piano e dello spazio ed il calcolo differenziale (inclusa la geometria differenziale). Ed il III si divide in due sezioni distinte; l'una, di natura *teorica*, comprende il calcolo integrale nel campo reale, la teoria delle funzioni di variabili complesse (inclusa la teoria delle funzioni ellittiche) e le equazioni differenziali; segue una parte *pratica* relativa ai minimi quadrati, ai calcoli di assicurazione ed alle carte geografiche. Chiude l'opera un particolareggiato indice per materie, la cui utilità non ha bisogno di essere dimostrata. La vastità del piano di quest'opera non ha impedito che la esposizione ne fosse elementare e che in essa fossero introdotte nozioni e teorie che di rado si trovano in libri scolastici (ad es. la teoria delle cubiche piane). Ond'è che, a colui che oggi intende percorrere il vastissimo mondo matematico, essa è destinata a prestare servigi che, piuttosto che a quelli offerti da un atlante tascabile, sono equiparabili a quelli che ai podisti italiani da tempo prestano le ottime carte del nostro stato maggiore.

G. L.

O. TH. BÜRKLEN. — *Aufgabensammlung zur analytichen Geometrie der Ebene.* Mit 32 Figuren. (Sammlung Goschen) Leipzig, Goschen, 1905, 12°, [Prezzo del vol. leg. Mk. 0.80]

Questa raccolta comprende 627 problemi, seguiti dai risultati; i temi a cui si riferiscono sono: I. Punti e segmenti. II. La retta. III. Il Cerchio. IV. La parabola. V. L'ellisse. VI. L'iperbola. VII. Le

Digitized by Google

coniche in generale (da notarsi la risoluzione grafica delle equazioni cubiche e biquadratiche). VIII. Coordinate polari. IX. Curve di ordine superiore al secondo e curve trascendenti.

G. L.

NOTIZIE

I PREMI DELL'ISTITUTO DI FRANCIA. — Nella seduta del 18 Dicembre vennero, fra gli altri, conferiti i premi seguenti:

Premio Francoeur: al Prof. Stouff. Premio Montyon (meccanica): a Mesnager. Premio Poncelet: a Lallemand. Premio Guzmann: a Perrotin. Premio Lalande: a W. H. Pickering. Premio Valz: a Giacobini. Premio Pontécoulant: a J. C. Kapteyn. Premio Damoiseau: a Fayet e Fabry. Premio Binoux (storia delle scienze): a P. Tannery. Premio Petit d'Ormoy: a F. Borel.

Negli anni venturi l'Accademia stessa conferirà, fra gli altri, i seguenti premi:

Premio Francoeur: 1906. Scoperta utile ai progressi delle matematiche pure ed applicate.

Premio Bordin 1907: v. *Bollettino* T. VIII, 1905, p. 62.

Premio Vaillant 1907: v. id. id.

Gran Premio delle scienze matematiche 1906: Realizzare un progresso importante nello studio della deformazione delle quadriche.

Premio Poncelet 1906: Matematiche applicate.

Premio Vaillant 1909: Perferzionare in un punto importante l'applicazione dei principi della dinamica dei fluidi alla teoria dell'elica.

Premio Pontécoulant 1907: Ricerche di meccanica celeste.

Premio Damoiseau: Teoria del pianeta fondata su tutte le osservazioni note.

***

SULL'INSEGNAMENTO DELLA STORIA DELLE MATEMATICHE IN RUSSIA si trovano notizie in un articolo di A. Bonolis inserito nel fascicolo di Nov. - Dic. 1905 del *Periodico di matematica per l'insegnamento secondario*, articolo nel quale si legge tradotto il programma del corso tenuto all'Università di Mosca negli anni 1889-89 e 1899-90 da V. V. Bobynin.

***

PUBBLICAZIONI RECENTI SULLA STORIA DELLE MATEMATICHE. — F. Amodeo. Gli istituti accademici di Napoli intorno al 1800 (Atti della Accademia Pontaniana, vol. XXXV). [I sodalizi considerati sono la R.

Digitized by Google

Accademia delle Scienze, l' Istituto nazionale, il R. Istituto d' incoraggiamento alle scienze naturali e la Società pontaniana].

E. Solmi. Nuovi studi sulla filosofia naturale di Leonardo da Vinci. Leonardo da Vinci astronomo. Leonardo da Vinci e la teoria della visione. (Atti e Memorie della R. Accademia Virgiliana di Mantova, Anno accademico 1904-1905);

A. Favaro, Amici e corrispondenti di Galileo Galilei: XIV Giacomo Badouère, XV Martino Hastal (Atti del R. Ist. Ven., T. LXV); L' episodio di Gustavo Adolfo di Svezia nei racconti della vita di Galileo (Ivi); Serie decimasesta di scampoli galileiani (Atti e Memorie della R. Acc. di Padova, 1905-06).

R. Meier, De Heronis. Dissertatio inauguralis, Lipsiae, MCMV. [In base a considerazioni filologiche, l' A. conclude che Erone fiorì circa tra il 150 ed il 50 a C.]

P. Tannery. Les éphémerides chez les Byzantins. [Bull. des Sciences math., Febbrajo 1906. Framento postumo pubblicato per cura del fratello Giulio].

***

PER FAVORIRE LE RICERCHE SUL CALCOLO GEOMETRICO. — Dal resoconto pubblicato nell' aprile 1905 « dall' International Association for promoting the study of quaternions and allied systens » (cfr. *Bollettino*, T. II, 1899, p. III, e T. V, 1902, p. 31) si desume che tale sodalizio è attualmente ricco di 70 membri ed ha per presidente il Prof. Joly e per segretario il Prof. Macfarlane. Il resoconto stesso contiene un supplemente di 23 numeri alla « Bibliography of Quaternions » già nota ai nostri lettori (*Bollettino*, T. VIII, 1905, p. 77).

***

TEMA PROPOSTO DAL POLITECNICO DI MONACO. « Esporre storicamente lo svolgimento della teoria delle equazioni a derivate parziali del primo ordine, dalle sue origini sino ad oggi. Riguardo alla teoria più antica, bisognerà discutere e criticare la memoria di Houtain, *Des solutions singulières des équationibus différentielles* (Annales des Universités de Belgique, Années 1851-54) ». Le memorie dei concorrenti devono essere inviate al Senato del Politecnico di Monaco prima del 16 Ottobre 1906.

***

LA NOZIONE DELL' INFINITO SECONDO GLI STUDI PIU' RECENTI. È il tema posto a concorso pel 1906 dall' Accademia di Scienze morali e politiche di Napoli. Scadenza 30 Settembre 1907; premio L. 1000. Le memorie presentate potranno essere scritte in italiano, latino o francese.

Digitized by Google

***

TEMI POSTI A CONCORSO DALLE UNIVERSITA' DI HALLE E ZURIGO. — I. « È noto che la determinazione delle superficie a curvatura media costante dipende dalla stessa equazione differenziale da cui dipende quella delle superficie a curvatura integra negativa costante. Di queste sono note parecchie, epperò si conoscono anche parecchie soluzioni di quella equazione differenziale. Determinare le superficie a curvatura media costante che corrispondono a tali soluzioni. » Premio 150 Marchi. I lavori dei concorrenti devono essere inviati alla Segreteria dell' Università di Halle entro il 27 Ottobre 1906.

II. « Studiare il moto di un punto pesante su di una sfera, mediante due almeno dei metodi recenti della meccanica celeste e paragonare analiticamente e numericamente i risultati di tale ricerca con quelli nascenti dall' applicazione allo stesso problema delle funzioni ellittiche. » I lavori dei concorrenti devono essere inviati al Rettorato dell' Università di Zurigo entro il 31 Dicembre 1906.

***

LA SOCIETÀ SCIENTIFICA DI BRUXELLES, ha proposto come tema di concorso per l' anno 1905 il *perfezionamento di un punto importante del calcolo funzionale.* Le memorie in risposta devono essere inviate al Segretariato di quel sodalizio prima del 1°. Ottobre 1906.

***

PREMIO DELLA FONDAZIONE BOLYAI. Tale premio (cfr. *Bollettino*, T. VI, 1903, p. 63) venne per la prima volta (1905) conferito al Poincaré; ma la commissione, per dare al l' Hilbert un attestato dell' alta stima pei suoi lavori, deliberò che un' analisi di essi prendesse posto accanto a quella degli scritti premiati. La relazione generale che, per ragioni di salute, non potè essere scritta da F. Klein, venne redatta dal Prof. G. Rados e può leggersi nel vol. LXIII dei « Mathematische Annalen ».

***

IL I ANNIVERSARIO DELLA MORTE DI P. TANNERY venne ricordato in forma solenne da G. Milhaud con una lezione fatta all' Università di Montpellier il 27 Nov. 1905; tale lezione, in cui la vita e le opere di quel grande sono descritte ed analizzate, venne pubblicata nel Fascicolo del 15 Feb. 1906 di « La révue des idées ».

Bestonzo Pietro, Gerente.

Genova - Tipografia R. Istituto Sordomuti - 1906.

Digitized by Google

CARLO CLAUSEN

HANS RINCK Succ.

LIBRAIO DELLE LL. MM. IL RE E LA REGINA

e della R. Accademia delle Scienze di Torino

11, Via Po — TORINO — Via Po, 11

La Libreria Carlo Clausen

spedisce gratuitamente a chi li richiede i seguenti Bollettini trimestrali:

N. I. Bollettino di Scienze Mediche
» II. Bollettino di Scienze Tecniche
» III. Bollettino di Novità Letterarie
» IV. Bollettino di Scienze Naturali

e s'impegna, a richiesta, di tenere correntemente informati i Clienti di tutte le pubblicazioni in qualunque lingua che si riferiscano ai loro studi speciali.

CATALOGO ANTIQUARIO

D'IMMINENTE PUBBLICAZIONE:

MATEMATICA

FISICA

ASTRONOMIA

Si spedirà *gratis* a chi ne farà richiesta

Digitized by Google

SOMMARIO DEL FASCICOLO

R. BONOLA. *Il modello di Beltrami di superficie a curvatura costante negativa.*

RECENSIONI ED ANNUNZI.

Oeuvres de C. HERMITE, I [G. L.].
*Correspondance d'*HERMITE *et* STIELJES, II [G. L.].
E. R. NEUMANN. *Studien über die Methoden von C. Neumann und G. Robin* [G. LAURICELLA].
F. AMODEO. *Vita matematica napoletana* [G. L.].
A. BUCHERER. *Elemente der Vektor-Analysis* [G. L.].
A. WEGENER. *Die Alfonsinischen Tafeln* [F. PORRO].
G. WERTHEIM· *Anfangsgründe der Zahlenlehre* [G. VACCA].
R. SCHRÖDER. *Die Anfangsgründe der Differentialrechnung und der Integralrechnung* [G. L.]
F. SEVERI. *Complementi di geometria projettiva* [E. CIANI].
M. SALVADORI. *Esposizione della teoria delle somme di Gauss* [G VIVANTI].
O. BIERMANN. *Vorl. über mathem. Näherungsmethode* [G. VIVANTI].
O. STOLZ und J. A. GMEINER. *Funktionentheorie*, II [G. VIVANTI].
P. BACHMANN. *Allgemeine Arithmetik der Zahlenkörper* [G. VIVANTI].
Annuaire du Bureau des Longitudes, 1906 [G. L.].
F. G. M. *Cours de géométrie élémentaire.*
SCHLOEMILCHS *Handbuch der Mathematik* [G. L.].
O. TH. BÜRKLEN. *Aufgabensammlung zur anal. Geom.* [G. L.].

NOTIZIE.

I premi dell'Istituto di Francia. — Sull'insegnamento della storia delle matematiche in Russia. — Pubblicazioni recenti sulla storia delle matematiche. — Per favorire le ricerche sul calcolo geometrico. — Tema proposto dal Politecnico di Monaco. — La nozione dell'infinito secondo gli studi più recenti. — Temi posti a concorso dalle Università di Halle e Zurigo. — La Società scientifica di Bruxelles. Premio della fondazione Bolyai. — II I anniversario della morte di P. Tannery.

IL BOLLETTINO DI BIBLIOGRAFIA E STORIA

DELLE

SCIENZE MATEMATICHE

si pubblica a fascicoli trimestrali di almeno 32 pagine cadauno.

L'abbonamento è fissato al prezzo annuo di **L. 6** per l'Italia e di **L. 7,50** per l'Unione Postale, *pagabili anticipatamente.*

Gli abbonamenti si ricevono presso l'editore **Carlo Clausen (Hans Rinck Succ.)** in **Torino** - Via Po, N.° 11 - e presso i principali librai d'Italia e dell'estero.

Per quanto concerne l'Amministrazione rivolgersi esclusivamente all'Editore stesso. Indirizzare invece lettere, manoscritti, libri, giornali e tutto ciò che riflette la Redazione al **Prof. Gino Loria** della R. Università di **Genova.**

Digitized by Google

BOLLETTINO DI BIBLIOGRAFIA

E

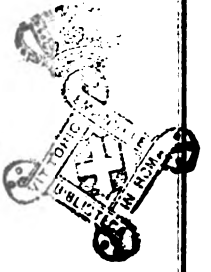
STORIA

DELLE

SCIENZE MATEMATICHE

pubblicato per cura di

GINO LORIA



Anno IX – Fasc. 3.°

TORINO
CARLO CLAUSEN (HANS RINCK Succ.)
Libraio delle LL. MM. il Re e la Regina

1906.

Digitized by Google

Opere del Prof. GINO LORIA

della R. Università di Genova

IL PASSATO ED IL PRESENTE

DELLE PRINCIPALI

TEORIE GEOMETRICHE

Seconda edizione accresciuta ed interamente rifatta

Lire 8.

SPEZIELLE

algebraische und transscendente

EBENE KURVEN

THEORIE UND GESCHICHTE

Autorisierte, nach dem italienischen Manuskripte bearbeitete deutsche Ausgabe

von

FRITZ SCHÜTTE

Mit 174 Figuren auf 17 lithographirten Tafeln

Mark 28.

LE SCIENZE ESATTE

NELL' ANTICA GRECIA

Libro I e II: *esauriti.*

Libro III. - **Il substrato matematico della filosofia naturale dei Greci. L. 4 —**

Libro IV. - **Il periodo argenteo della geometria greca . . . . . „ 4 —**

Libro V. - **L' aritmetica dei Greci . . . . . „ 5 —**

LE

TRASFIGURAZIONI DI UNA SCIENZA

DONNE MATEMATICHE

Seconda edizione accresciuta di note

Lire 2.

Per commissioni rivolgersi alla

Libreria CARLO CLAUSEN - HANS RINCK Succ.

Via Po, 11 — TORINO — Via Po, 11

Digitized by Google

BOLLETTINO DI BIBLIOGRAFIA E STORIA
DELLE
SCIENZE MATEMATICHE
ANNO IX. — **Luglio, Agosto e Settembre** — 1906.

MATEMATICA E MATEMATICI DEL GIAPPONE

DI GINO LORIA.

A proposito di un' opera recente (1)

Nelle centoventi pagine che costituiscono il lavoro che porge l' occasione al presente articolo, il dotto autore si è proposto di scrivere una succosa storia della matematica giapponese dai tempi più remoti sino al 1868, anno nel quale le istituzioni e gli usi dell' Occidente si diffusero con velocità meravigliosa in tutta la terra del sole levante e questa fece così radicali progressi da raggiungere lo stadio di civiltà attuale. A partire da quell' anno i matematici giapponesi cominciarono a consacrarsi esclusivamente allo studio delle investigazioni importate dall' Europa e dall'America, non prestando più che scarsa attenzione all' antica matematica indigena (*Wasan*). Ora è appunto la storia del *Wasan* che il Prof. Hayashi ha voluto e saputo tracciare. Per far ciò egli si è giovato dell' opera congenere scritta in Giapponese da Toshisada Endo, il quale vi dedicò sedici anni d' intenso lavoro, senza badare a fatiche e spese, pur di giungere a delineare un quadro fedele di una disciplina tramontata per sempre, nella conoscenza della quale egli era ed è anche oggi a nessuno secondo.

La storia delle scienze esatte nel Giappone si suole a ragione dividere in cinque periodi, cioé: I. Dai tempi più remoti sino al 553 (in tale epoca non è percepibile alcuna influenza cinese). II. Dal 554 al 1591 (prima importazione della matematica cinese pel tramite della Corea, trasmissione diretta della stessa, studio fattone dai Giapponesi, decadenza). III. Dal 1592 al 1672 (nuova importazione di matematica cinese; il famoso matematico Takakasu Seki introduce metodi proprii e, insegnandoli ai propri discepoli, fonda la scuola che che ne porta il nome; sintomi d' influenza europea, specialmente per

(1) T. HAYASHI, *A brief history of the Japanese Matematics*. (Estratto dal « Nieuw Archief voor Wiskunde, Tweede Reeks, VI en VII Deel, 1905).

Digitized by Google

opera degli Olandesi). IV. Dal 1673 al 1711 (progressi della matematica indigena, la scuola di Seki raggiunge il suo apogeo). V. Dal 1772 al 1868 (ultimi avanzamenti della matematica giapponese).

Riguardo al *I Periodo* si serbò notizia dei nomi allora in uso per designare i numeri, nomi i quali, con la loro manifesta legge di formazione, palesano l'esistenza di un sistema di numerazione a base 10; siccome poi la storia civile assicura che venivano in quell'epoca tenuti i conti dei redditi e delle spese del pubblico erario, così non v'ha dubbio fossero generalmente note le quattro operazioni dell'aritmetica; fatto questo che trova un'implicita conferma nella memoria del commercio attivissimo in allora stabilito dal Giappone con la Corea e la Cina. Quando questo però raggiunse il suo massimo sviluppo l'aritmetica cinese cominciò ad essere usata dai sudditi del Mikado.

L'inizio del *II Periodo* è caratterizzato dalla venuta (verso il 554) nel Giappone da Kodara (che è uno dei regni in cui era allora divisa la Corea) di due dotti, Wang-Tao-Liang e Wang-Pao-san, i quali, pur senza pubblicamente professare, diffusero nel Giappone la matematica cinese pura ed applicata. Nel 602, egualmente da Kudara, venne un sacerdote buddista che presentò al Mikado un calendario, dei libri astronomici e delle opere intorno agli incantesimi ed alla predizione dell'avvenire; in conseguenza (come già era accaduto nell'antica Roma!) la matematica venne equiparata ad un'arte magica ed ebbe luogo un deplorevole arresto nel suo sviluppo. Il calendario cinese, inventato durante la dinastia Sung, fu adottato in Giappone nell'anno 604 e sotto il regno del XXXIV imperatore Jomei (629-641) fu introdotto il sistema cinese di pesi e misure. L'imperatrice Teuchi (662-671) istituì una scuola composta di due dottori e venti studenti, destinati ad occuparsi esclusivamente di matematiche; si vuole anche che essa abbia fondato un osservatorio astronomico e spinto parecchi dotti a fare osservazioni celesti. Tale osservatorio essendo poi stato abbandonato, l'imperatore Mombu nel 700 ne fondò un nuovo; lo stesso principe gettò anche le basi di una scuola del tipo delle nostre università, destinata a formare dottori in giurisprudenza, astronomia, cronologia, matematica, ecc.

I libri di testo per la matematica *Swan-king*, cioè « i dieci libri di matematica », furono eziandio importati dalla Cina e pubblicati durante il governo delle tre dinastie che ressero il Giappone nei periodi 265-419, 386-557, 617-935; il più importante di essi era il nono, del quale esistono due versioni, una delle quali veniva dai Cinesi fatta risalire all'anno 3700 avanti Cristo, mentre l'altra ritenevasi appartenere al periodo 792-717 a. C. Esso contiene problemi concernenti aree

Digitized by Google

piane e volumi, risoluzione di equazioni lineari e quadratiche, nozioni sopra i numeri negativi e le proporzioni, ecc. Nel detto periodo avevano corso in Giappone i valori $\pi = 3$ e $\sqrt{2} = \frac{7}{5}$ ed eran noti i casi più semplici del teorema di Pitagora (l'enunciato generale e la dimostrazione appartengono ad un periodo posteriore).

Il sistema universitario, di cui più sopra segnalammo la fondazione, decadde rapidamente, specialmente per quanto si riferisce alla matematica, onde al tempo dell'imperatore Engi (901-922) dovette essere ricostrutto su nuove basi e così ebbe luogo una momentanea rifioritura degli studi matematici; alla quale non tardò a tener dietro un periodo di decadenza, non solo nella produzione scientifica, ma in tutta la cultura, decadenza che forse ebbe termine sotto la dinastia che regnò nel periodo 1336-1573, perchè a tale epoca appartengono alcuni castelli, di cui tuttora si ammirano le maestose rovine.

I metodi di calcolo (*Sanchu* o *Sangi*), usati durante il II periodo della storia della matematica giapponese, sono noti nella sostanza e nella forma; le operazioni aritmetiche che si sapevano eseguire arrivano sino alla radice quadrata; ed i problemi che si sapevano risolvere giungono a quelli che oggi si riducono a sistemi determiaati di equazioni lineari; riferiamo come esempio di tali quostioni il seguente enunciato: « Il prezzo complessivo di tre cavalli, quattro buoi e due pecore, è 130 *ryo* (antica moneta d'oro); quello di due cavalli, tre buoi e dieci pecore è 124 *ryo*; finalmente quello di quattro cavalli, un bue ed otto pecore è 134 *ryo*. Trovare il prezzo di ciascun animale ».

Il successivo *III Periodo* comincia quando il famoso eroe Toyotoni Taiko, la cui autorità venne stabilita nel 1565, decise di importare nuovamente nel Giappone la matematica cinese, nell'intento di agevolarne l'uso nella vita sociale. A tale scupo egli inviò in Cina uno de' suoi vassalli Shigeyoshi Mori; ma questi, a cagione del basso grado sociale che occupava, venne colà ritenuto indegno d'insegnare la matematica e quindi rimandato in patria; Taiko allora lo elevò di grado e lo rimandò in Cina; in conseguenza Mori potè famigliarizzarsi con la matematica cinese, e divenire, non solo un ottimo insegnante di essa, ma anche il primo che in Giappone abbia scritto su tale scienzà; sgraziatamente però l'opera da lui composta (nel 1600) non è giunta sino a noi. A lui devesi l'uso generale d'uno strumento il *Soroban* per eseguire i calcoli aritmetici, il quale disimpegna lo stesso ufficio del *Swampan* dei Cinesi.

Mori ebbe tre discepoli così famosi da meritare l'epiteto di « dotti onorevoli » (« San-shi »). Yoshida (1598-1672), il più eminente di essi, scrisse nel 1672 un'opera che, benchè sia stata onorata da parecchie

Digitized by Google

edizioni, è andata perduta. Chiso Imamura, altro « dotto onorevole ». è l'autore della terza opera matematica che annoveri la letteratura giapponese; pubblicata nel 1639, contiene il valore $\pi = 3, 162$, mentre un commento fatto ad essa nel 1660 ne spiega la genesi col dare il valore indiano $\pi = \sqrt{10} = 3, 162\ldots$ Yoahitane Takahara, ultimo di quella terna gloriosa, non compose, a quanto sembra, alcun libro, ma fece degli ottimi discepoli, onde condivide a buon diritto con gli altri « dotti onorevoli » la gloria di avere assisa su solide basi la matematica della sua terra. Fra i discepoli di Takahara va notato Yoshinori Isomura, la cui opera, resa di pubblica ragione negli anni 1660-0664, contiene soluzioni eleganti di notevoli problemi geometrici; per porgere ai nostri lettori un'idea del loro genere riferiamo i seguenti enunciati: « In un triangolo rettangolo si inscrive un circolo e poi si tracciano altri due cerchi ognuno dei quali tocchi il cerchio inscritto, l'ipotenusa ed un cateto; calcolare i raggi dei tre cerchi. Dato un cerchio, 19 altri fra loro eguali si descrivono a toccarlo esternamente (od internamente) ed a toccare ciascuno il successivo; determinarne i raggi ».

Un'altra opera di valore porta per titolo *Sanso* (1663); ne è autore Shigekivo Matsumura; sono ivi calcolati esattamente i raggi, gli apotemi e le are dei poligono regolari di dato lato ed è dedotto il seguente valore di π: 3, 14159264877769869218 esatto sino alla settima decimale; nella stessa opera trovansi problemi riflettenti la costruzione di quadrati magici e di analoghe figure chiamate « circoli magici. »

In tale indirizzo la matematica giapponese proseguì sin verso il 1670, quando cioè un discepolo di Takahara, Kazuyuki Sawaguchi, fece noto un nuovo metodo di calcolo, il « Tengen », dovuto ai Cinesi. D'altronde non va dimenticata l'influenza europea per fermo subita dal Giappone (in particolare della matematica giapponese) quando il paese di cui occupiamo cominciò ad essere visitato dai Portoghesi (1547), dagli Spagnuoli (1587) e dagli Olandesi (1582- o 1585); specialmente questi ultimi si adoperarono a diffondere le nozioni scientifiche che possedevano nella terra in cui erano approdati.

Nel *IV Periodo* campeggia la figura del più grande matematico giapponese di cui siasi serbata memoria; Takakazu Seki, nato nel 1642 a Fujioka, morto a Tokyo nel 1708; inventore di due nuovi metodi matematici (il « Tenzan » o aritmetica universale e l'« Enri », surrogato dal calcolo infinitesimale), autore di un grande numero di libri, in gran parte tuttora manoscritti, e fondatore d'un sistema scolastico composto di cinque classi (al termine di ciascuna delle quali lo studente riceveva uno speciale diploma).

Digitized by Google

Seki, non avendo alcun figlio a cui affidare il segreto delle proprie scoperte, diede l'incarico di raccoglierle, coordinarle ed eventualmente svolgerle a due suoi egregi discepoli: Murahide Araki e Katahiro Takebe, i quali, corrispondendo alle aspettative del maestro, mantennero ed accrebbero il lustro e l'autorità della scuola sekiana.

Discepolo del primo è Yoshisuke Matsunaga, a cui debbonsi sette ottimi libri, ove, all'infuori di temi che già segnalammo in pubblicazioni anteriori, si trova il triangolo aritmetico (volgarmente detto « di Pascal »), la soluzione di problemi di un tipo che si trova in molti libri aritmetici europei (1), il calcolo dei volumi di porzioni di sfera o di poliedri, ecc. Nel 1709 Akaki indusse il proprio discepolo Yoshimasa Ota a scrivere un libro in cui fossero risolti col metodo « Tenzan » svariati problemi; l'opera risultante («Kwatsuyo-Sanpo ») contiene una procedura per calcolare il raggio del cerchio inscritto in un poligono di un numero grande dai lati, avente il lato di assegnata lunghezza, procedura della quale è palese la connessione col calcolo di π; ivi si incontra il valore di π esatto sino alla settima decimale e la proposizione (attribuita a Seki) che afferma essere $\frac{\pi}{6}$ il rapporto tra il volume di una sfera ed il cubo del suo diametro; ivi finalmente cenni di un altro metodo di calcolo, designato col nome di « Endan ».

Il Takebe, l'altro dei menzionati discepoli di Seki, compose un libro sul metodo « Tengen », un altro (1685) sul metodo « Endan » ed un terzo contenente risultati più originali; finalmente, compulsando le opere postume di Seki, compilò un'opera, tuttavia manoscritta, raccogliente i principî più reconditi di quella celebre scuola scientifica.

---

(1) Alludiamo al seguente:

« C'era una volta un ricco proprietario il quale aveva avuto 15 figli dalla sua prima moglie e 15 dalla seconda. Questa gli suggerì di scegliere come erede universale uno dei suoi trenta figli determinato come segue: tutti i figli sarebbero stati disposti in circolo, alternativamente quelli del primo e quelli del secondo letto, a partire da uno di essi si sarebbe contato di dieci in dieci, escludendo dall'eredità il 10.°, 20.°.... Essendo tale proposta stata accettata, si vide che, ad un certo punto della cernita, restavano tutti i figli della seconda moglie ed uno solo della prima. La seconda moglie allora si ritenne sicura che l'erede sarebbe stato uno dei propri figli e continuò l'operazione in ordine inverso cominciando dal figliastro; ma al termine di essa si vide che questo appunto era il favorito dalla sorte ».

Ora — prescindendo dal contenuto morale di questa storiella, che la renderebbe degna di figurare in un manuale per gli aspiranti ai premi di virtù — non v'ha dubbio che il riferito problema presenti molti lineamenti comuni col così detto « Ludus Joseph », che si trova già negli scritti di Chuquet e Cardano e che non manca in alcuna raccolta di ricreazioni matematiche (Bachet, Alberti, Ahrens, ecc.); ed è specialmente notevole che il numero delle persone in gioco sia sempre 15 + 15. Risiede forse qui uno degli argomenti intrinseci per dimostrare la dipendenza fra la matematica giapponese e la nostra?

Digitized by Google

Genkei Nakane (1661-1673), il migliore discepolo di Takabe, fu eminente matematico e pregiato compilatore di calendari; e Yoshisuke Matsunaga, distinto discepolo di Akaki, viene ordinariamente riguardato come il vero e proprio continuatore della scuola di Seki. Nel 1716 egli pubblicò un' opera contenente le formule che danno la somma di più numeri in progressione aritmetica o geometrica, soggetto questo che egli svolse ulteriormente in altro lavoro recante la data 1723; altri suoi scritti contengono svariate teorie ed applicazioni; notevole quella (1745) destinata a far note osservazioni e sviluppi collegati a scritti di Seki. A lui debbonsi ancora ricerche originali sul calcolo della lunghezza di un arco circolare o della superficie di un segmento di cerchio, e notevoli espressioni in serie di π e π^2; ci sia lecito qui riferirle:

$$\pi = 2\sqrt{2}\, F\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}, \tfrac{1}{2}\right),$$

ove F è simbolo di una serie ipergeometrica,

$$\pi^2 = 8\left(1 + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1.2}{3.5} + \tfrac{1}{5}\cdot\tfrac{1.2.4}{3.5.7} + \cdots\right);$$

da ultimo siamo a lui debitori di una tabella di « triangoli rettangoli in numeri, » i cui lati non superino 100. Ad un altro matematico giapponese si deve poi quest' altro notevole valore:

$$\pi = \frac{4428224593 4930}{136308121570117},$$

esatto sino alla tredicesima decimale.

Riassumendo si vede che sei erano le principali specie di calcoli adoperati dai matematici giapponesi durante il IV periodo della loro storia e che essi venivano applicati a l'aritmetica, a l'algebra e la geometria elementari; in geometria essi si occuparono di preferenza di rette e circoli, sfere, cilindri e coni; considerarono anche l'ellisse come sezione del cono circolare retto, senza però riuscire a valutarne l'area; risolsero elegantemente problemi di quadratura e cubatura, rappresentando la cosa cercata col mezzo di serie convergenti; sforzandosi di rettificare la circonferenza o quadrare il cerchio (problemi questi che sempre appassionarono vivamente i geometri giapponesi!) ottennero dei valori molto approssimati, benchè lentamente convergenti fossero le serie adoperate per raggiungerli. È presumibile che parte delle cognizioni da essi allora possedute fosse di origine straniera (olandese), ma la cosa è dubbia, vista l'antipatia che tuttora nutrivano per tutto ciò che non fosse indigeno.

Digitized by Google

Il *V Periodo*, benchè non sia che una continuazione del precedente, pure deve esserne tenuto distinto per la creazione di nuovi procedimenti di calcolo per parte di Naomaru Aijma (1739-1798); esso periodo si fa cominciare col 1772, perchè appunto in tale anno quel matematico divenne capo della scuola Seki. Oltre a nuove importanti formole di rettificazione della circonferenaa, oltre a soluzioni eleganti di alcuni nuovi problemi geometrici si fa a lui merito di essersi adoperato a che nelle dimostrazioni il linguaggio ordinario fosse sostituito dai simboli algebrici. Nel 1794 egli inventò un metodo per rettificare le linee sghembe e per quadrare o cubare i solidi provenienti dall' intersezione di superficie; notevole è ad es. un'espressione in serie da lui scoperta pel volume comune a due cilindri retti ad assi fra loro perpendicolari.

Oltre due donne matematiche, delle cui opere (come di quelle di Ipazia!) non si serbò che un nebuloso ricordo, merita di essere citato Sadasuke Fiujita (1734-1807), condiscepolo di Adjma, che addestrò alla ricerca sclentifica centinaia di discepoli e pubblicò (1774, 1779, 1791) opere di gran pregio; alcuni dei risultati da lui conseguiti ottennero già una sufficiente notorietà avendone il Prof. D. Kikuki esposta l' esenza e le conclusioni in alcuni ben noti lavori (1). La scuola da lui diretta trovò una rivale in quella fondata e disetta da colui a cui il padre nascendo impose il nome di Yasumasa Suzukima, ma che volle invece essere chiamato Yasuaki Aida; egli (che visse negli anni 1747-1817) insegnò le dottrine di Seki; ma, avendone mutati l' ordine e la nomenclatura, si atteggiò ad inventore, il che provocò vivacissime contese fra lui e Fujita. Ai discepoli di Fujita e di Aida si deve lo sviluppo in serie di potenze di x della funzione sen (m arc sen x), un nuovo metodo per estrarre le radici quadrate, un procedimento, simile a quello di Horner, per risolvere un' equazione numerica, ecc. Altri sintomi certi di intensa vita matematica sono offerti dalle numerose scuole (in numero di 16 almeno) allora fiorenti, dalle ricerche compiute (non senz' attingere a fonti olandesi) per stabilire un buon calendario lunisolare (il quale ebbe poi corso finchè nel 1872 fu surrogato dal gregoriano), e dalle vaste operazioni geodetiche fatte sotto la sapiente direzione dell' eminente scienziato Tadanori Ino (1745-1821).

Ritornando ai matematici « puri » va notato come Yasushi Wada (morto nel 1818), ottavo capo della scuola sekiana, benchè non abbia pubblicata alcuna opera, abbia raggiunte le più alte vette della fama, grazie alle fruttifere indagini di calcolo infinitesimale da lui compiute e dei cui risultati si è serbato intatto il ricordo: basti citare la nuova

(1) Cfr. *Periodico di matematica per l'insegnamento secondario*, t. IX, 1896, p. 23; CANTOR, *Vorlesungen ueber Geschichte der Mathematik*, III. Bd., II. Aufl., (Leipzig 1901) pag. 663.

Digitized by Google

espressione da lui trovata pel volume comune a due cilindri retti ad assi ortogonali (v. più sopra), i suoi studi sulle progressioni geometriche illimitate, l'invenzione, che gli viene attribuita, delle trocoidi generali (*roulettes*) ed in particolare della cicloide (che riuscì a rettificare).

Altri matematici, degni di essere ricordati, sono; Akiyuki Kenmochi, a cui si attribuisce un metodo per trasformare una frazione ordinaria in decimale; Nobuyoshi Saito, che si occupò della ricerca dei centri di gravità di aree piane (qui sembra indiscutibile l'influenza olandese!); Gokwan Uchida, discepolo del precedente ed autore di una tavola di logaritmi; Kubota, Kuwamoto e Takemura, membri della stessa scuola, che determinarono i centri di gravità di certi solidi; Shuki Koide (1798-1863) a cui si deve la prima pubblicazione (1842) d' una tavola di logaritmi; Yasumoto Gokai (1791-1862), che s' illustrò per indagini sui quadrati magici, Nagayoshi Kikuchi, autore di una pregevole teoria dei numeri (1842); Tsunemitsu Murata, che (1842) mise insieme un' ottima raccolta di problemi relativi a quadrature, cubature e rettificazioni collegate all'ellisse; ed altri minori, di cui, per amore di brevità, è lodevole tacere.

Tutti questi scienziati, col loro numero e col loro valore, mostrano l' ampio sviluppo e l'elevato livello raggiunto dal « Wasan ». Ma le notizie che su di essi ci vengono fornite non permettono di decidere se e quanto essi siano stati influenzati dai popoli che precorsero i Giapponesi sulla via della civiltà. A chiarirla giova tener presente che solo a partire dal 1745 venne permesso lo studio di opere olandesi e che tutti i matematici vissuti a partire dall' alba del Secolo XIX erano in grado d' intendere quella lingua. Nel 1855 poi Kohan Ono, per incarico del governo, studiò matematica sotto la direzione d' una olandese e da allora la matematica europea (« Yozan ») fu coltivata con sempre maggiore impegno; finalmente, a partire dal 1872 il governo giapponese impose che nelle scuole questa venisse esclusivamente insegnata; il « Wasan » venne in conseguenza relegato nel museo degli strumenti fuor d'uso, nel quale soltanto gli storici vanno a contemplarlo col meritato rispetto. Emerge da ciò che la ricerca della dipendenza fra la matematica giapponese e l'europea può a rigore limitarsi al periodo che si chiude con la metà del Secolo XVIII; tale ricerca ha un' importanza che non ha bisogno di essere dimostrata; il Prof. Hayashi non ha creduto di affrontarla; ma ha preparata, per chi vorrà compierla, una preziosa raccolta di documenti ben concatenati e di fatti importanti.

Digitized by Google

RECENSIONI ED ANNUNZI

P. H. Schoute. — *Mehrdimensionale Geometrie.* II Teil. *Die Polytope.* Mit 90 Figuren und 123 Figuren. (Sammlung Schubert XXXVI). Leipzig, Goeschen, 1905, 8°, p. IX + 326. [Prezzo del vol. legato Mk. 10].

Nel rendere conto della II Parte dell'utile opera del Prof. Schoute, seguiremo il sistema a cui ci attenemmo occupandoci della I (*Boltino*, VI, 1903, 39-42), indicheremo, cioè, succintamente che cosa essa contiene.

Sez. I. *Introduzione topologica.* Essendosi l'A. proposto di studiare le figure (« politopi ») degli spazi superiori che corrispondono ai poligoni del piano ed ai poliedri dello spazio ordinario, cominciò dall'estendere i concetti ed i metodi usati in quest'ultima; citiamo solo le considerazioni da lui svolte sulle projezioni e sezioni dei politopi e sulla classificazione che di essi può farsi. Per estendere poi il teorema di Descartes-Eulero, che è il nocciolo di tutta la teoria dei poliedri, l'A. osserva che le dimostrazioni che ne vennero date possono riunirsi sotto quattro tipi: a) dim. di Eulero, b) dim. di Lhuillier-Steiner, c) dim. di Legendre, d) dim. di Cauchy-Staudt; nessuna è di agevole generalizzazione; ma siccome del teorema cercato non è difficile intuire l'enunciato, così, per dimostrarlo, è naturale ricorrere all'induzione completa. Il teorema a cui per tale strada si giunge fu scoperto nel 1852 dallo Schläfli; ma, la relativa memoria non essendo stata pubblicata che nel 1901, esso fu ritrovato dallo Stingham e pubblicato nel 1880. Fra i corollari di esso l'A. si limita a segnalare alcuni dovuti al Brückner.

Sez. II. *Relazioni metriche.* Le figure considerate nella I Sezione danno origine a importanti relazioni metriche. Anzitutto si presenta la questione del numero delle costanti da cui una di esse dipende; essa è risolta da una formola elegante, scoperta dallo Schubert e che l'A. stabilisce. Si può poi pensare ad una geometria del più semplice politopo (il « Simplex ») analoga alle note geometrie del triangolo e del tetraedro; l'A. ne traccia le primissime linee, considerando il baricentro di un « Simplex » ed i centri delle sfere inscritta e circoscritta. Il calcolo dei volumi dei poliedri occupa molte ed interessanti pagine dell'opera in questione, in cui si trovano estese a tutti gli spazi le principali proposizioni stereometriche, nonchè le relative dimostrazioni. Ci basti segnalare l'estensione di due notevoli teoremi sul tetraedro, la cui conoscenza è dovuta alla pubblicazione

Digitized by Google

delle opere di Gauss: uno risale al 1844 ed è dovuto al Gerling; l'altro data solo dal 1900 e fu scoperto dal Darboux.

III. Sez. *Politopi regolari.* Ispirandosi all'antica massima secondo cui « il faut réculer pour mieux sauter », l'A. comincia la presente Sezione dall' esporre le proprietà dei poligoni regolari (convessi o stellati) e semiregolari, indicando il modo di costruirli, di calcolarne le coordinate dei vertici, di rappresentarli graficamente, ecc. non tacendo le applicazioni alla teoria dei gruppi finiti; i metodi da lui prescelti sono quelli che sono suscettibili di estensione agli spazi lineari qualunque ed è appunto come preparazione a quanto segue che la loro introduzione nel presente libro fu decisa e va approvata. Passando allo spazio a quattro a dimensioni si trovano *sei* politopi regolari, di cui i tre primi sono gli analoghi del tetraedro, dell'esaedro e dell'ottaedro regolari; tutti sono accuratamente studiati dall'A. sia in sè, sia nelle loro projezioni, largamente sfuttando considerazioni e metodi che in gran parte risalgono a Schlegel e Schläfli; oltre a tali artifici *geometrici*, l'A. non sdegna a ricorrere ad un ingegnoso impiego dei colori, suggerito dalla Signora Stott, terza figlia del celebre matematico Boole. Dai politopi regolari si possono dedurre altre notevoli figure, che, come analoghe a quello studiate in cristallografia, l'A. ha studiate diffusamente in anteriori pubblicazioni, delle quali egli dà qui un conciso riassunto. Finalmente, negli spazi di più di quattro dimensioni, non esistono che *tre* politopi regolari; sono quelli che corrispondono al tetraedro regolare ed al cubo e quello correlativo a quest' ultimo; su di essi e sui loro derivati, l'A. istituisce ricerche analoghe a quelle svolte trattando degli spazi a tre e quattro dimensioni; ci basti segnalarne le applicazioni alla teoria dei gruppi.

IV. Sez. *I politopi rotondi.* Nello spazio ad dimensioni il luogo de' punti aventi da un punto fisso una distanza costante è uno spazio sferico o sfera ad $n-1$ dimensioni. Figure di tal fatta s'incontrarono già nello studio dei poliedri regolari, ma solo nell'ultima parte dell'opera in esame esse vengono metodicamente investigate tanto dal punto di vista elementare, quanto da quello della geometria descrittiva od analitica. E poichè viene anche fatta menzione dei sistemi di sfere, così si apprende di quali prerogative goda la configurazione di S_n analoga a quelle notissime risultanti da tre cerchi di un piano o da quattro sfere e dai loro centri di similitudine. Finalmente non mancano i calcoli di aree e volumi. Ricerche analoghe vengono istituite sopra i coni ed i cilindri degli spazi superiori; nè mancano da ultimo nozioni sulle figure rotonde in generale, come coronamento delle quali sta l'estensione a tutti gli spazi della notissima regola di (Pappo) Guldino. L'opera si chiude con una raccolta di esercizi vari, in aggiunta di quelli che in buon numero sono sparsi in tutta l'opera stessa.

Digitized by Google

Percorrendo quessto breve resoconto sul lavoro del Prof. Schoute (o meglio ancora il lavoro stesso) si vedrà agevolmente come l'A. abbia accuratamente percorse tutte le diramazioni della geometria elementare del piano e dello spazio, per scoprire le teorie ed i metodi suscettibili di estensione a tutti gli spazi; in molti casi trovò che altri lo aveva preceduto ed allora egli si giovò dei risultati così ottenuti; ma per altri trovò nuove plaghe da dissodare; e chi tenne dietro alle sue numerose pubblicazioni di questi ultimi anni ben sa i frutti del suo assiduo lavoro.

Malgrado ciò, non v'ha dubbio che molti lettori, giunti al termine dell'opera discorsa, rimarranno delusi, non avendo trovato in essa un vero avviamento verso i fertili campi di studio a cui, specialmente in Italia, vennero spese tante e sì nobili fatiche. L'opera dello Schoute, per quanto coscienziosa ed ampia, non corrisponde, dunque, perfettamente al suo titolo; essa esige ed aspetta un essenziale complemento; auguriamo di potere presto annunciare (e abbiamo ragioni per credere di poterlo fare ben presto) che, quantunque sotto altro cielo, tale legittimo desiderio è stato magistralmente soddisfatto.

G. L.

C. A. Laisant. — *Initiation mathématique. Ouvrage étranger à tout programme dédié aux amis de l'enfance.* Avec 97 figures dans le texte. Genève et Paris, 1906, 8.°, p. VIII+167 [Prezzo fr. 2].

Dalle elevate cime delle investigazioni iperspaziali compiute dal Prof. Schoute, l'A. del presente volumetto c'invita a scendere al livello del mare, e, con la scorta di un simile Cicerone, il « silenzio verde » del piano ci fa sentire tutto il fascino che un grande poeta ha in esso rilevato. Per uscir di metafora, il Laisant si è proposto di svolgere, nella presente sua pubblicazione, alcune sue idee sull'insegnamento dei primi rudimenti della matematica, da lui già schizzate in una conferenza pubblicata nel volume *L'éducation fondée sur la science* (II. éd. 1905). L'antico deputato boulangista anche in quest'occasione assume l'attitudine di un ribelle contro sistemi inveterati (v. il titolo surriferito!), dichiarando che: « Ceux pour lesquels le mot instruire est synonime d'ennuyer - et quelquesfois de torturer - sont des véritables malfaiteurs publics. Il est temps que leurs domination néfaste prenne fin ». Appunto per preparare gl'insegnanti del nuovo tipo da lui sognato, l'A. ha scritto il presente libro, la cui tesi è così compendiata: « Depuis la toute première enfance jusqu'au début des études, mettons par exemple de 4 à 11 ans, il est possible de faire pénétrer dans l'esprit de l'enfant vingt fois plus des choses qu'on ne le fait en matière mathématique;

Digitized by Google

cela en l'amusant au lieu de le torturer ». Benchè tale libro contenga molti e bei giuochi con numeri o figure, pure non appartiene alla categoria delle raccolte di ricreazioni matematiche, si avvicina piuttosto alla ben nota opera di Clifford « Il senso comune nelle scienze esatte » ; lo ricorda se non altro perchè al pari di questo si legge con incessante piacere. Consigliandone, quindi, la lettura, non soltanto noi contribuiamo nel modesto limite delle nostre forze al trionfo di idee eccellenti (1), ma siamo certi di procurare ai nostri lettori dei momenti di vero godimento intellettuale.

G. L.

F. CALDARERA. — *Corso di Meccanica razionale.* Palermo, Tipografia matematica (8.° grande). — Vol. I, 1900. *Cinematica. Studio delle forze*, pag. IV + 323 (Prezzo L. 10). — Vol. II, 1901. *Statica-Dinamica*, pag. 357 (Prezzo L. 10). — Vol. III, 1906. *Equilibrio e moto dei sistemi continui - Idrostatica - Idrodinamica*, pag. 268 (Prezzo L. 10).

Questo trattato rispecchia, nelle linee generali, le lezioni, che il Caldarera tiene da più lustri nell'Ateneo Palermitano. Ma l'opera non è circoscritta entro i limiti angusti delle esigenze scolastiche: vi si trovano acconciamente inserite teorie ed applicazioni complementari, ed è pur tenuto conto dei più recenti indirizzi di ricerca, il che attesta nel venerando autore una invidiabile e ancor giovanile agilità di comprensione.

I due primi volumi, usciti già da qualche anno, sono certo ben noti ai lettori del *Bollettino*. Non è dunque il caso di discorrerne ora. Ecco piuttosto una rapida rassegna del terzo volume, testè pubblicato.

Anzitutto un capitolo introduttivo sulle trasformazioni degli integrali semplici e multipli, e poi la cinematica dei sistemi continui, in cui le nozioni fondamentali sono egregiamente coordinate così ai complementi differenziali di Beltrami come alla discussione geometrica delle deformazioni locali e dei caratteri salienti del moto.

Seguono la statica e la dinamica dei sistemi continui, secondo Cauchy, cui l'A. riattacca per via energetica, mediante il principio dei lavori virtuali, il caso particolarmente importante dei corpi elastici: in poche pagine è fatto posto al teorema di Betti e a qualche sua semplice applicazione; e si arriva alla definizione delle due forme

(1) Una conferma del loro valore trovasi nella proposizione che Herbart pose a base di qualunque insegnamento e che F. Klein scrisse come chiusa alle sue *Lezioni di geometria non-euclidea* (Semestre invernale 1889-90): « Se.en Sie niemals absolut langweilig! »

Digitized by Google

tipiche di vibrazioni elastiche (onde piane longitudinali e trasversali).

Nel capitolo dedicato all'idrostatica sono sviluppate applicazioni importanti: la formula barometrica, fino ai dettagli del calcolo numerico; le condizioni di stabilità dei galleggianti; e la teoria delle forme ellissoidiche di equilibrio di masse fluide ruotanti.

Per bene apprezzare lo svolgimento dato all'idrodinamica giova aver presente lo stato attuale di questa dottrina.

Essa poggia, come ogni altro ramo della meccanica, sopra basi solide, ormai fuori di discussione: e queste consentono applicazioni brillanti a tutti i fenomeni, in cui non è sensibile, o, almeno in prima approssimazione, può essere trascurata l'influenza delle condizioni ai limiti.

Ma, dove tale influenza diviene essenziale, come in molti problemi della idraulica pratica, la idrodinamica razionale non ha ancora saputo rispondere alle esigenze dei tecnici, pur esperendo le più affinate risorse dell'analisi.

Così, mentre per le questioni concernenti corpi solidi, sia rigidi che elastici, i precetti della ingegneria sono figliazione naturale delle teorie meccaniche, l'idraulica è, per ora, in gran parte costretta a desumere i propri criteri direttivi da un empirismo più o meno sagace, senza aver modo di lumeggiarli, vagliandoli e collegandoli con metodo matematico.

Tutto ciò nettamente apparisce dal trattato del Caldarera.

Vi si fanno apprezzare le cose semplici e belle, mettendo tra altro in rilievo i risultati modernissimi di Hugoniot e di Hadamard sulla propagazione delle onde; ma non si dissimulano le gravi difficoltà, che rimangono da superare, nè si lascia, per dir così, illanguidire con lusinghe matematiche il senso della realtà. L'A. lo tiene al contrario ben desto; e là dove, come ad es. nella foronomia, le ricerche teoriche hanno finora fallito, egli si prende cura di far intanto conoscere al lettore i fenomeni e i risultati sperimentali.

Imitabile esempio, che si ispira a sani criteri di filosofia naturale!

T. Levi-Civita.

N. Nielsen. — *Handbuch der Theorie der Gammafunktion.* Leipzig, Teubner, 1906, 8.°, p. X+326 [Prezzo del vol. leg. Mk. 12].

Come osserva giustamente Nielsen, nessuno prima di lui si era proposto di raccogliere in un unico quadro tutto quanto si conosce intorno alla funzione Γ; ben pochi però meglio di lui, che da molti anni si dedica allo studio di questa notevole funzione, avrebbero potuto fare un simile lavoro.

Digitized by Google

La sua pregevolissima opera è divisa in tre parti.

Nella P. I - *Teoria analitica della funzione* Γ - egli prende le mosse (C. 1) dalla definizione di $\Gamma(x)$ mediante l'equazione alle differenze finite:

$$\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x),$$

e la condizione:

$$\lim_{x=+\infty} \frac{\Gamma(x \quad n)}{(n-1)!\,n^x} = 1,$$

ne determina l'espressione analitica mediante un prodotto infinito:

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x} \prod_{\gamma=1}^{\infty} \frac{(s+1)^x}{s^{x-1}(x+s)},$$

e ne stabilisce le proprietà fondamentali; introduce anche le funzioni:

$$\psi(x) = D_x \lg \Gamma(x), \quad \beta(x) = \frac{1}{2}\left[\psi\left(\frac{x+1}{2}\right) - \psi\left(\frac{x}{2}\right)\right]$$

e ne determina i valori per argomenti razionali. Passa poi (C. 2) a studiare la funzione:

$$P_a(x) = \sum_{\gamma=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!} \frac{a^{x+s}}{x+\gamma},$$

la quale ha la proprietà, che:

$$Q_a(x) = \Gamma(x) - P_a(x)$$

è una funzione trascendente intera, e della quale è un caso particolare la funzione $P(x)\,(=P_1(x))$ di Bourguet; e tratta indi (C. 3) dello sviluppo in serie di potenze di tutte le funzioni sin qui considerate. Mostra (C. 4) come mediante tali funzioni possa esprimersi il valore di certe serie e di certi prodotti infiniti. Dopo un primo studio (C. 5) sulle facoltà, e sui numeri e polinomi di Stirling, sviluppa (C. 6) le funzioni:

$$\beta(x),\ \mu(x) = \lg\Gamma(x) - \left(x - \frac{1}{2}\right)\lg x + x - \lg\sqrt{2\pi},\ \nu(x) - \lg x - \psi(x)$$

in serie di facoltà, e ne deduce la formola di Raabe:

$$\int_0^1 \lg\Gamma(x+\alpha)\,d\alpha = x\lg(x-1) + \lg\sqrt{2\pi}.$$

Infine (C. 7) studia l'espressione di $\Gamma(x)$, $\psi(x)$, $\mu(x)\,\nu(x)$ per valori molto grandi di x, e le radici di $\psi(x)$ e di $\beta(x)$, e dimostra (C. 8)

Digitized by Google

che nessuna delle funzioni $\psi(x)$, $\Gamma(x)$, $\mu(x)$, $\nu(x)$, $\beta(x)$, $B\left(\frac{x}{2}, \frac{1}{2}\right)$ (B indica l'integrale euleriano di prima specie) può essere integrale d'una equazione algebrico-differenziale.

La P. II - *Integrali definiti* - incomincia (C. 9) colla considerazione di un tipo d'integrali:

$$V(x) = \int_0^1 \varphi(t)\, t^{x-1}\, dt,$$

il quale comprende come casi speciali molte delle funzioni che figurano nella presente teoria. Si passa poi agli integrali euleriani di prima e di seconda specie (C. 10, 11), ed agli integrali esprimibili con funzioni Γ (C. 12). Segue la rappresentazione delle funzioni $\beta(x)$, $\mu(x)$, $\nu(x)$, $\psi(x)$, $\lg\Gamma(x)$ mediante integrali (C. 13), e l'applicazione delle formole trovate alla ricerca di nuovi sviluppi in serie (C. 14). Si rappresentano pure per integrali e per serie le funzioni $P_a(x)$, $Q_a(x)$ (C. 15), e si stabiliscono e si applicano a vari casi speciali (C. 16) le *formole di reciprocità* o *di inversione* di Mellin:

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty x^{z-1}\, dx \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(t)\, x^{-t}\, dt,$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} x^{-z}\, dz \int_0^\infty \Phi(t)\, t^{z-1}\, dt.$$

La P. III studia le *Serie di facoltà*. Con questo nome, di cui abbiamo già fatto uso più sopra, si designano le serie della forma:

$$\Omega(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{s!\, a_s}{x(x+1)\ldots(x+s)}.$$

Stabilite (C. 1°) le proprietà fondamentali di tali serie - campo di convergenza, teorema d'identità, rappresentazione mediante integrali definiti, condizioni necessarie e sufficienti perchè una funzione sia sviluppabile in serie di facoltà —, si applicano alle $\Omega(x)$ (C. 18) le operazioni fondamentali dell'analisi: operazioni aritmetiche, differenziazione ed integrazione ordinarie e finite; indi (C. 19) si determinano le condizioni a cui deve soddisfare la costante α perchè $\Omega\left(\frac{x}{\alpha}\right)$ sia esprimibile in serie di facoltà, e si sviluppa (C. 20) $\Omega(x)$, secondo il metodo di Stirling, in una serie di potenze negative di x, che risulta o con-

Digitized by Google

vergente od asintotica. Tutti questi risultati trovano finalmente (C. 21) la loro applicazione nella teoria della funzione Γ.

Chiude il volume una copiosissima lista bibliografica, che comprende più di 400 titoli.

G. VIVANTI.

E. CZUBER. — *Vorlesungen über Differential-und Integralrechnung.* Erster Band. Zweite, sorgfältig durchgesehene Auflage. Leipzig, Teubner, 1906, 8.°, p. XIV + 569 [Prezzo del vol. leg. Mk. 12].

Questa edizione non differisce sostanzialmente dalla prima, di cui abbiamo parlato a lungo in questo *Bollettino* I, (1898, p. 94). Fra le principali aggiunte nota l'autore nella prefazione i principii della teoria delle funzioni di variabili complesse e le formole sulle funzioni iperboliche. Avremmo desiderato che egli, nel preparare questa nuova edizione, avesse tolto le piccole imperfezioni da noi notate, ciò che avrebbe potuto fare assai facilmente. Ad una sola osservazione, quella relativa alla p. 103 (p. 114 della 2.ª ed.), egli ha voluto rispondere; ma la sua giustificazione non ci sembra del tutto soddisfacente.

G. VIVANTI.

G. L. ARRIGHI. *La storia della matematica in relazione con lo sviluppo del pensiero,* I. Migliajo, p. XIII + 15 + 133; Torino, G. B. Paravia, 1905 [Prezzo L. 1,50].

La tesi sostenuta in questo libretto e che il titolo adombra è ben lungi dall'essere nuova; senza tentare di stabilire chi per primo l'abbia esposta od applicata, ricorderemo che A. Arneth, nella sua ben nota *Geschichte der reinen Mathematik* (Stuttgart, 1852) scrive « als Geschichte des reinen Denkens, besonders in seinen Anfängen, darf die Geschichte der Mathematik nicht getrennt werden von der Entwickelungsgeschichte des menschlichen Geistes, also von der allgemeinen Kulturgeschichte, welche selbst wieder ihre Grundlagen in Gesetzen hat, welche die Natur und den Menschen beherrschen » (p. 5); e si affrettò a soggiungere che « Libri, in seiner Geschichte der mathematischen Wissenschaften in Italien, hat wohl einen ähnlichen Weg betreten ». D'altronde C. J. Gerhardt comincia la sua *Geschichte der Mathematik in Deutschland* (München, 1877) con le parole « ich hatte die Absicht, die Geschichte der Mathematik in Deutschland auf dem Hintergrund der allgemeinen deutschen Culturgeschichte zu zeichnen », le quali contengono evidentemente un'implicita approvazione

Digitized by Google

per quella tesi. Altre adesioni si potrebbero facilmente rinvenire in molte altre opere; ma noi ci limiteremo a citare i lavori del Tannery sulla storia della matematica greca e le *Vorlesungen* del Cantor (veggansi specialmente le pagine consacrate alla storia del dibattito fra Leibniz e Newton per l'invenzione del calcolo infinitesimale, ove tale questione viene lumeggiata con la scorta di notizie attinte alla storia politica di quel tempo), dai quali emerge che tali autori sono d'accordo col nostro nel ritenere che « il progresso della scienza è in intima relazione colle condizioni economiche e sociali di un popolo, coll'intero sviluppo del pensiero » (p. 13). Quindi a ragione lo stesso afferma che « per dare un giudizio sul valore di una teoria, di uno scienziato bisogna prima studiare i tempi, l'ambiente che hanno prodotto quella teoria, quello scienziato » (p. 69). Però tale studio che l'A. esige è *necessario* ma non *sufficiente* per potere pronunciare quel giudizio, essendo a ciò anche indispensabile « nello scrittore .. una profonda cognizione delle dottrine di cui imprende a descrivere l'insorgenza e lo sviluppo » (pagina VIII). Ora è ciò appunto che ci sembra mancare all'A., i cui giudizi vanno pertanto accolti con la massima cautela: così non tutti si sentiranno animati dalla sconfinata ammirazione dell'A. pel Cavalieri, che (p. 63 e 102 n.) egli non esita a proclamare il più grande matematico italiano (e Lagrange?); così pochi converranno con lui esistere un « metodo di Guldino », dal momento che questi attinse con eccessiva larghezza alle opere di Pappo; e nessuno lo approverà di avere lasciata completamente nell'ombra la bella figura di Leonardo Pisano e di avere bruscamente troncata la sua storia con l'invenzione del calcolo infinitesimale e passata quindi in silenzio la magnifica opera matematica dei secoli XVIII e XIX.

L'A. dichiara nella Prefazione di essersi assai giovato delle opere del Cantor e del Ball, ma nel testo cita altri autori; p. es., a proposito di Diofanto, ricorda la notissima opera del Cossali, t. I, p.56-95, ove, fra altro, è stabilito con solidi argomenti essere da rigettare la grafia « Diofante »; ora come mai il nostro A. l'ha adottata, senza dirci il perchè di tale sua decisione?

Un' ultima osservazione, scelta fra le molte che ancor potremo fare. A. p. 113, a proposito della stolta opposizione che incontrò Descartes, si nota: « È bello il vedere come la passione umana spesso viene a portare il turbamento nei cieli sereni dell'arte e della scienza! » (p. 113). Ora io esprimerei il modesto desiderio che nello sperato II migliajo dell'opuscolo discorso, nel riferito periodo fosse surrogata la parola *brutto* alla parola *bello*.

G. L.

Digitized by Google

G. CASTELNUOVO. — *Lezioni di Geometria analitica e proiettiva.* Volume II (Geometria analitica dello spazio — Superficie del secondo ordine). Roma-Milano, Società editrice Dante Alighieri, 1905, 8° gr., p. 497-718 [Prezzo L. 4].

In questo breve volume, che completa il corso delle *Lezioni* del CASTELNUOVO, la *Geometria analitica dello spazio* [Parte quarta, pagg. 497-601 (1)] e la teoria delle *Superfici di secondo ordine* [Parte quinta, pagg. 602-724 (2)] sono svolte, naturalmente, secondo quello stesso disegno, a cui nel primo volume, sono informate le analoghe teorie di geometria piana. Torna così superfluo un esame dettagliato e diffuso dell'ordine e della distribuzione della materia. Io piuttosto, rivolgendo all'insieme dell'opera uno sguardo complessivo, rileverò come quei molteplici e singolarissimi pregi didattici che costituiscono il carattere più evidente delle *Lezioni* del CASTELNUOVO, traggano origine non soltanto dalla cura assidua e sapiente di ogni particolare, ma ancora e sopratutto dalla elevatezza e dalla genialità dei criteri generali cui l'opera è ispirata.

Sotto questo rispetto parmi che mai più opportunamente d'ora le *Lezioni* del CASTELNUOVO potevano uscire alla luce. — Da varie parti e con diversi intenti si va adesso reclamando una riforma degli insegnamenti di geometria nei nostri primi bienni universitari. Ora, quand'anche si voglia prescindere dal fatto che il programma di queste *Lezioni* riesce, forse meglio di ogni altro noto sin qui, a contemperare le esigenze di una coltura professionale coi più complessi bisogni di una preparazione agli studi geometrici superiori, io penso che, nel contrasto già delineatosi, in ordine alle accennate riforme, fra le meno illuminate aspirazioni ad un ritorno all'antico e le più tenaci tendenze conservatrici di quegli indirizzi rigidamente esclusivi da cui il pensiero matematico, dopo le vittorie conseguite, tende oramai a svincolarsi, l'opera del CASTELNUOVO rechi un'alta parola ammonitrice, dimostrando con la luminosa prova dei fatti, che soltanto chi sappia assurgere alla più larga e più elevata comprensione del naturale svolgimento del pensiero può dare alla scuola un programma di lavoro vitale e fecondo.

UGO AMALDI.

(1) Cap. I. Relazioni di posizione tra punti, rette e piani — II Distanze, angoli, aree, volumi. — III. Trasformazione delle coordinate - Coordinate omogenee di punti e piani - Coordinate proiettive. — IV. Rappresentazione analitica delle superfici e delle linee nello spazio. — V. Proiettività fra due spazi.

(2) Cap. I. Polarità definita dalla superficie. — II. Rette di una quadrica - Generazione delle quadriche - Fasci e schiere di quadriche. — III Proprietà diametrali. — IV. Equazioni ridotte delle quadriche. — Sezioni circolari - Quadriche conficali.

Digitized by Google

J. E. CAMPBELL. — *Introductory Treatise on Lie's Theory of Finite Continuous Transformation Groups*. Oxford, Clarendon Press, 1903, 8°, p. V + 416 [Prezzo 14 sh.].

In questo trattato del CAMPBELL non si debbono certamente ricercare procedimenti o vedute originali, poichè esso deriva in modo prevalente, se non esclusivo, dalla *Theorie* di LIE-ENGEL e dalle opere redatte dallo SCHEFFERS; e il contributo personale dell'autore alla materia del libro si limita a poche applicazioni particolari di indole analitico-geometrica (1) e sopratutto a considerazioni formali di calcolo simbolico sugli operatori infinitesimi (2), sulle quali, anzi, oserei dire che l'A. si indugia con soverchia compiacenza.

Ma nonostante questa deficenza di originalità sostanziale, il *Treatise* del CAMPBELL merita, a mio parere, fra i non pochi trattati elementari di teoria dei gruppi del LIE che già possediamo, un posto particolarmente onorevole. Esso riunisce in sè buona parte di quei pregi, per i quali tanti altri trattati inglesi si sono diffusi per tutto il mondo, a costituir quasi il primo nocciolo della coltura di intere generazioni di giovani matematici. Forse il pregio saliente sta nella pertinace tendenza a coordinar sempre ogni teoria alle sue applicazioni concrete: sta il fatto che il CAMPBELL, attingendo con gusto assai fine a tutta l'opera del LIE e dei suoi collaboratori, ha saputo raccogliere una ricchissima serie di risultati particolari e di applicazioni geometriche, con cui riesce ad illustrare da ogni lato le teorie generali ed a renderne evidente e perspicua l'intima natura sintetica.

La materia, veramente abbondante, è costretta senza sforzo in un volume di mole relativamente modesta, grazie ad un ordine diligentemente studiato e ad una forma saggiamente rapida e snella. Così quest'opera, facile alla lettura ed attraente per la varietà e l'eleganza degli argomenti, è, forse più d'ogni altra, idonea a dare ai giovani una prima non superficiale conoscenza delle teorie del LIE e a suscitare in loro il desiderio di ricercare poi sulle memorie originali del sommo geometra norvegese le più alte e più larghe concezioni.

L'opera è divisa in venticinque capitoli. Dopo una introduzione (cap. I-II) in cui sono poste e commentate con isvariati esempi le definizioni fondamentali, l'A. svolge nei capitoli dal III al XIII (pag. 34-193) le teorie generali (teoremi fondamentali, invarianti, primitività e stazionarietà, transitività e intransitività, isomorfismo e similitudine, ecc.). I capitoli dal XIV al XIX (pagg. 994-318) sono dedicati alla teoria delle equazioni pfaffiane e alle derivate parziali del primo ordine, ai

(1) Cfr. Mess. of. Math. vol. XXVIII (1898): Proc. of the London math. Society, volume XXIX (1897-98).

(2) Cfr. Proc. of the London math. Society, vol. XXVIII (1896-97) e XXIX (1897-97).

Digitized by Google

sistemi di funzioni e alle trasformazioni di contatto, con particolare riguardo alle applicazioni geometriche. Segue un capitolo sugli invavarianti differenziali (cap. XX), e l'opera si chiude con la determinazione e classificazione dei gruppi continui finiti di trasformazioni puntuali e di contatto del piano (cap. XXI-XXIII), e dei gruppi primitivi dello spazio (cap. XXIV), e con un cenno sulle relazioni che intercedono fra la teoria dei gruppi e quella dei sistemi di numeri complessi a più unità (cap. XXV).

UGO AMALDI.

F. GOMES TEIXEIRA. — *Tratado de las curvas especiales notables.* Madrid, Imprenta de la « Gaceta de Madrid » 1905, 4°, p. IX + 632.

L'opera di cui ci apprestiamo a rendere conto ha comuni l'origine e gli intenti con quella che venne analizzata nel Vol. VI (1903), p. 5 di questo *Bollettino* ed al pari di quella venne coronata dall'Accademia di Madrid, sotto gli auspici della quale essa appunto ora vede la luce (1). A differenza di quella recensita nel c. l., la monografia del prof. Teixeira abbraccia anche le curve sghembe; per compenso vennero da essa escluse parecchie curve o classi di di curve, piane o non, che pure avrebbero meritato un accurato studio.

Per dare ai nostri lettori con concisione ed esattezza un'idea del piano e dei limiti della nuova opera del chiaro matematico portoghese non troviamo miglior sistema del riprodure qui l'indice dei capitoli e paragrafi che la formano; eccolo:

Cap. I. *Cubiche notevoli.* — 1. La cissoide. 2. La concoide di Sluse. 3. La strofoide. 4. La trisettrice di Maclaurin. 5. Le cubiche circolari.

Cap. II. *Cubiche notevoli* (continuazione). 1. La foglia di Cartesio. 2. L'anguinea di Newton. 3. Il tridente di Newton. 4. La concoide parabolica di Descartes. 5. La cubica di Agnesi. 6. La curva di Rolle. 7. La cubica mista. 8. Il foglio parabolico. 9. Le parabole divergenti. 10. Le cubiche di Chasles. 11. Breve notizia bibliografica sopra le cubiche in generale.

Cap. III. *Quartiche notevoli.* I. Le spiriche di Perseo. 2. Le cassiniane. 3. Le lemniscate. 4. La lemniscata di Bernoulli.

Cap. IV. *Quartiche notevoli.* (continuazione). 1. La lumaca di Pascal. 2. La cardioide. 3. Le ovali di Descartes. 4. Le quartiche bicircolari.

(1) Essa forma anche il t. 22 delle « Memorias de la R. Accademia de Ciencias exactas, fisicas y naturales de Madrid ».

Digitized by Google

Cap. V. *Quartiche notevoli* (continuazione). 1. La concoide di Nicomede. 2. Le parabole virtuali. 3. La « Kreuzcurve ». 4. La « Kohlenspitzcurve ». 5. La quartica piriforme. 6. La curva del diavolo. 7. Il foglio semplice. 8. Il foglio doppio. 9. Il trifoglio. 10. Il bicorno. 11. La curva K. 12. Le concoidi focali delle coniche. 13. Breve notizia intorno a l'origine e la scoperta della teoria delle quartiche.

Cap. VI. *Sestiche e biquartiche notevoli.* 1. La curva di Watt. 2. L'astroide. 3. Le curve parallele all'astroide. 4. Le evolute dell'ellisse e dell'iperbola. 5. Lo scarabeo. 6. L'atriftaloide. 7. La curva di Talbot. 8. Le toroidi. 9. La curva equipotenziale. 10. Nota finale sulla storia della teoria delle curve algebriche.

Cap. VII. *Curve trascendenti notevoli.* 1. La logaritmica. 2. La catenaria. 3. La trattrice di Leibniz. 4. La sintrattrice di Sylvester. 5. La catenaria di eguale resistenza. 6. La sinusoide. 7. La quadratrice di Dinostrato. 8. La curva elastica. 9. La isocrona paracentrica.

Cap. VIII. *Le spirali.* 1. Spirale di Archimede. 2. Spirale di Galileo. 3. Spirale di Fermat. 4. Spirale parabolica. 5. Spirale iperbolica. 6. Lituo. 7. Spirale logaritmica. 8. Spirale di Poinsot. 9. Spirale trattrice. 10. Cocleoide. 11. Clotoide. 12. La pseudocatenaria. 13. La pseudotrattrice.

Cap. IX. *Parabole ed iperboli.* 1. Le parabole in generale. 2. La parabola semicubica. 3. La parabola cubica. 4. Le iperboli in generale.

Cap. X. *Curve cicloidali.* 1. La cicloide ordinaria. 2. Cicloidi accorciate ed allungate. 3. Epicicloidi ed ipocicloidi. 4. Ipocicloide tricuspide. 5. Evolvente di circolo. 6. Epicicloidi ed ipocicloidi accorciate ed allungate. 7. Curva di Delaunay. 8. Pseudocicloidi.

Cap. XI. *Varie classi di curve.* 1. Perle di Sluse. 2. Rodonee di Grandi. 3. Spighe. 4. Nodi. 5. Curve di Lamè. 6. Curve d'inseguimento. 7. Spirali sinusoidi. 8. Curve di Ribaucour.

Cap. XII. *Curve sgembe.* 1. Spirale di Pappo. (1) 2. Curva di Viviani. 3. Ippopeda di Eudosso. 4. Clelie. 5. Lossodromia. 6. Epicicloidi sferiche. 7. Ellisse sferica. 8. Clelie.

Cap. XIII. *Curve sghembe* (continuazione). 1. Elica cilindrica. 2. Elica conica. 3. Elica cilindro-conica. 4. Cerchio sghembo. 5. Ellisse logaritmica. 6. Iperbola logaritmica. 7. Parabola logaritmica. 8. Curva di Archita. 9. Oroptera. 10. Curve di Bertrand.

Cap. XIV. *Poloide ed erpoloide.*

Quale criteri l'A. abbia scelto nell'ordinare la materia esposta egli non dice ed al lettore riesce difficile indovinare; ad es. non si sa comprendere perchè mai la concoide di Nicomede (concoide della

(1) Sarebbe stato bene osservare che questa curva è algebrica del 10° ordine.

Digitized by Google

retta) debba comparire dopo la lumaca di Pascal (concoide del cerchio), mentre la precede razionalmente e storicamente, e perchè da entrambe siano staccate le concoidi focali delle coniche. A questo esempio altri se ne potrebbero aggiungere; non lo faremo, e piuttosto osserveremo che, non ostante il difetto additato, l'opera in esame può servire benissimo per consultazione, grazie ai due indici (uno dei nomi delle curve studiate, l'altro di quelli degli autori citati) con cui essa si chiude.

Per ciascuna curva considerata l'A. dà una breve notizia storico-bibliografica (1) e poi applica ad esse le teorie classiche della geometria analitica e del calcolo infinitesimale, non senza far cenno delle principali costruzioni relative; da analista provetto egli si compiace arrestarsi alle questioni di rettificazione, rilevando i molteplici casi in cui intervengono integrali ellittici. Sopra altre questioni che l'A. (non meno che tutti i geometri di cui conosciamo gli scritti) ha trascurate, ci riserbiamo di parlare in altra occasione. (2) E finiremo notando che lo stile limpido dell'A., l'eleganza dei calcoli da lui esposti e le numerose belle figure illustrative rendono agevole, facile e dilettosa la lettura dell'opera testè rapidamente discorsa.

G. L.

W. H. Blythe. — *On models of cubic surfaces.* Cambridge, University Press, 1905, 8.°, p. XII + 106 [Prezzo del vol. leg. sh. 4].

All'operazione di delineare una curva piana, nello spazio corrisponde quella di costruire una superficie; alla questione di determinare le forme che possono assumere le curve piane di dato ordine corrisponde quella di trovare i vari aspetti che può assumere una superficie di ordine noto e con singolarità prestabilite. Ma, mentre la prima di quelle operazioni o questioni si può risolvere, più o meno facilmente, col solo sussidio degli usuali strumenti del disegno, le altre due richiedono mezzi più complicati ed artifici più ingegnosi. Tali mezzi e tali

(1) Riguardo alla sintrattrice giova fare un'osservazione. Tale curva si trova definita a p. 353 dell'*Analytische Geometrie der höheren ebenen Curven* di Salmon-Fiedler (Leipzig, 1873), senza indicazione dell'inventore. Il Teixeira l'attribuisce al Sylvester (p. 338), senza giustificare tale sistema. Ora io ho di recente osservato che uno studio assai particolareggiato di tale curva, nonchè il nome con cui sogliamo chiamarla, trovasi nella memoria di Vincenzo Riccati *De natura, et proprietatibus quarundam curvarum, quae simul cum tractoria generantur, quaeque proinde syntractoriae nominabuntur* (De Bononiensi Scientiarum et Artium Instituto atque Academia Commentarii, T. III, 1755), p. 479-503). Ciò prova che la denominazione «sintrattrice di Riccati» sarebbe assai più propria di quella («sintrattrice di Sylvester») adottata dall'A.

(2) V. il T. II degli *Anaes scientificos da Academia polytechnica do Porto.*

Digitized by Google

artifici non sono nel dominio generale del pubblico matematico e siamo certi che avranno provato desiderio di conoscerli tutti coloro che ne ammirarono i risultati nelle splendide collezioni di modelli che la Germania ha sparse per tutto il mondo civile. A soddisfare, almeno in parte, tale desiderio è destinata l'operetta presente, ove trovansi i particolari della effettiva costruzione di una superficie cubica con il massimo numero *(quattro)* di punti doppi, seguiti dall'esposizione ed applicazione della procedura, indicata ed usata da Zeuthen e Klein, per dedurne superficie meno singolari. Affinchè tutto ciò riuscisse intelelligibile, anche senza ricorrere alle trattazioni metodiche della teoria delle superficie in discorso, il sig. Blythe ha premesso un compendio delle relative ricerche di Cayley, Schläfli e Reye; ma esso essendo assai mingherlino e monco, probabilmente non raggiungerà lo scopo pel quale fu scritto.

G. L.

C. GUICHARD. — *Sur les systèmes triplement indéterminés et sur les systèmes triple-orthogonaux*. Scientia N. 25. Paris, Gauthier-Villars, 1905, p. 95 [Prezzo del vol. leg. fr. 2].

Nel *Programma* della collezione SCIENTIA di cui fa parte il presente volume si legge essere dessa « destinée à mettre en evidence, par un exposé philosophique et documenté des découvertes récentes, les idées générales directrices et les variations de l'évolution scientifique ». Onde non è senza meraviglia che il lettore non trova nel volume stesso se non l'esposizione di idee personali dell'autore, che l'avvenire dirà se o non sieno idee direttive destinate ad esercitare qualche influenza sopra l'evoluzione della scienza. Si è in presenza, non di un riassunto di una serie omai chiusa di investigazioni, ma di una memoria scientifica, nuovo anello di una catena i cui altri costituenti sono da ricercarsi nelle *Annales de l'Ecole normale supérieure* per gli anni 1897, 1898 e 1903, e di cui giova prendere notizia prima d'intraprendere lo studio dell'attuale lavoro.

Il quale si propone lo studio delle proprietà dei sistemi tripli ortogonali negli spazi comunque estesi. Tale studio viene compiuto per via diretta servendosi in gran parte delle prerogative di cui godono i sistemi di equazioni differenziali. L'A., il quale non cita che i propri lavori e la grande opera del Darboux, non mostra conoscere gli studi, già bene avanzati, sulla geometria differenziale degli iperspazi: ond'è naturale il desiderio che fra questi e quelli che annunziamo, venga gettato un solido ponte. Non fosse che per affrettarne la costruzione, va raccomandata diffusione di questo nuovo lavoro dell'eminente professore della Facoltà di Clermond-Ferrand.

G. L.

Digitized by Google

H. WIELEITNER. — *Theorie der ebenen algebraischen Kurven höherer Ordnung.* (Sammlung Schubert XLIII). Leipzig, Göschen, 1905, p. XXII + 313. [Prezzo del vol. leg. Mk. 10].

La teoria delle curve piane, di cui i Greci con mano incerta tracciarono le prime linee, e di cui in mille occasioni teoriche e pratiche si manifestò necessaria la conoscenza, non venne trascurata dai geometri posteriori; ma soltanto con la creazione della geometria analitica (la quale permise la distinzione tra curve algebriche e curve trascendenti e la definizione di ordine di una curva algebrica) essa assunse contenuto ed aspetto di vera e propria teoria. A partire da quel momento l'attenzione degli investigatori si concentrò sulle curve algebriche e la relativa teoria si identificò con quella della teoria delle funzioni di due variabili, onde venne con eguale ardore coltivata da analisti e geometri. La perfezione che tale disciplina raggiunse verso la metà del secolo scorso è ritratta nel noto trattato del Salmon. Una nuova éra si apre per essa, grazie specialmente al Clebsch, per effetto dell'applicazione della teoria delle forme algebriche e della teoria delle funzioni ellittiche ed abeliane; i corrispondenti risultati sono visibili nelle *Vorlesungen* di Clebsch - Lindemann. Nuovi punti di vista generali e nuovi risultati speciali vennero acquistati da quella teoria grazie alle fruttifere indagini sulla teoria delle funzioni algebriche di una variabile indipendente, compiute in quest'ultimo ventennio; mentre d'altra parte gli incessanti studi sopra speciali curve aumentavano di giorno in giorno il materiale per illustrare le teorie generali. Onde una nuova esposizione della teoria in discorso era desiderabile e desiderata; quella che annunziamo, benchè di indole elementare, soddisfa nel suo insieme tale desiderio, perchè l'A., pur avendo costantemente d'occhio le esigenze della scuola, ha tenuto il debito conto delle più cospicue conquiste di recente compiute dalla geometria. A conferma di tale giudizio rileveremo la forma piana e generalmente corretta (1) adottata dall'A. i numerosi ed interessanti esempi e gli esercizi proposti; e finiremo riferendo l'indice degli argomenti svolti, affinchè il lettore possa formarsi un'idea dell'opera che le presenti linee intendono additargli.

I. Generalità.

II. Teoria delle polari. Singolarità semplici. Relazione tra ordine e classe di una curva.

III. Passaggio dalle coordinate di punti a quelle di rette.

IV. La Hessiana e le altre curve analoghe.

(1) Notiamo solo una piccola inesattezza a pag. 6 ed un'asserzione poco chiara nella chiusa del n. 5.

Digitized by Google

V. Le formole di Plücker.
VI. Genere. Curve razionali.
VII. Il triangolo analitico. Asintoti. Discussione di una curva.
VIII. Singolarità superiori.
IX. Trasformazione delle curve.
X. Principio di corrispondenza generalizzato.
XI. Sistemi di punti su una curva.
XII. Applicazioni dei risultati del Cap. precedente.
XIV. Curve di III ordine.
XV. Curve di IV ordine.
XVI. Sistemi di curve. G. L.

V. UND. K. KOMMERELL. — *Allgemeine Theorie der Raumkurven und Flächen.* I Band, p. VI + 144 [Prezzo Mk. 4,80]; II Band, p. VI + 212 [Prezzo Mk. 5,80]. Leipzig, Goeschen, 1903, 8°.

In questi due volumetti (essi portano i n. XXIX e XLIV della Sammlung Schubert) si trovano compendiate in buon ordine le parti più essenziali dell'odierna geometria differenziale. Il I di essi contiene le proprietà fondamentali delle curve sghembe e delle superficie rappresentate da equazioni della forma $f(x,y,z) = 0$; il secondo consta pure di due parti, la prima contenente la esposizione dei concetti e dei metodi che intervengono nello studio di una superficie generale di nota rappresentazione parametrica, la seconda consacrata a superficie speciali. Il metodo seguito dagli autori è *generalmente* analitico ed avrebbe potuto esserlo *totalmente* (come era, secondo noi, consigliabile) ove fossero state bandite alcune considerazioni infinitesimali sussidiarie. L'esposizione è generalmente elementare, ma si notano in essa alcune disuguaglianze, prodotte da certi passaggi troppo rapidi, che auguriamo scompajono in una ventura edizione. La ricca collezione di esercizi e gli accurati indici per materie accrescono il pregio della presente pubblicazione; l'interesse per la quale viene aumentato dal trovarsi in essa dimostrate alcune belle formole, il cui solo enunciato si legge nel ben noto volume di H. Stahl e V. Kommerell *Die Grundformeln der allgemeinen Flächentheorie* (Leipzig, 1893).

G. L.

H. SCHUBERT. — *Auslese aus meiner Unterrichts-und Vorlesungspraxis.* II Band, Leipzig, Goeschen, 1905. 8°, p. 218. [Prezzo del vol. leg. Mk. 4].

Questo II vol. dell'interessante opera dell'eminente professore del « Johanneum » di Amburgo si apre con la riproduzione del saggio citato nella chiusa del nostro resoconto dal I. vol. (*Bollettino* VIII,

Digitized by Google

1905, p. 109-110). « L'insegnante (osserva cominciando l'A.) il quale desidera che i propri scolari non perdano il loro tempo in calcoli pesanti, deve industriarsi a che nella planimetria e nella stereometria algebriche siano interi od almeno razionali non solo i dati ma anche le incognite »; ora il dare delle regole per conseguire tale risultato è appunto lo scopo della I. Sez. del volume in discorso, giacchè in essa sono accuratamente studiati i triangoli, i parallelogrammi, i poligoni, le piramidi di *Erone*, cioè ad elementi razionali. Non meno importante è la Sez. II, la quale tratta delle frazioni continue e della loro applicazione alle equazioni indeterminate di I e II grado. Nella III ed ultima poi l'A. ritorna sul calcolo elementare dei logaritmi, esponendo delle semplificazioni notevoli ai metodi da lui esposti in altra occasione (cfr. *Bollettino*, VII, 1905, p. 82-83).

Con questo volume l'opera annunziata è dessa finita? L'A. non lo dice; auguriamo non lo sia.

G. L.

J. Thomae. — *Grundriss einer analytischen Geometrie der Ebene.* Mit 8 Figuren im Text, Leipzig, Teubner, 1906, 8.°, p. X + 184 [Prezzo del vol. leg. Mk. 3.60].

O. Staude. — *Analytische Geometrie des Punktes, der geraden Linie und der Ebene.* Mit 387 Figuren in Text. Leipzig, Teubner, 1905, 8° gr., p. VIII + 447 [Prezzo del vol. leg. Mk. 14].

L. Heffter und C. Koehler. — *Lehrbuch der analytischen Geometrie.* I. Band. *Geometrie in den Grundgebilden erster Stufe und in der Ebene.* Mit 136 Figuren im Text. Leipzig, Teubner, 1905, 8° gr., p. XVI + 526 [Prezzo del vol. leg. Mk. 14].

Di questi tre volumi congeneri, pubblicati dall'infaticabile Casa Teubner, il primo, come indica il titolo, non è un vero e proprio trattato di geometria analitica, ma solo una guida, che l'A. scrisse ad uso dei propri discepoli, per dispensarli dal prendere appunti. Va notato nel piano di esso il preparare la geometria delle forme di II specie con quella delle forme di I ed il continuo intervento di concetti propri della geometria projettiva; l'una cosa e l'altra non costituiscono oggi più una novità, ma lo erano quando, vent'anni or sono, l'A. le introdusse nelle proprie lezioni. Oltre al punto e la retta, l'A. tratta di cerchi e sistemi di cerchi (notiamo una bella soluzione del problema di Malfatti) e di coniche; il tutto senza grande apparato analitico, il che renderà il suo scritto meglio accetto ai giovani.

Più elevato e profondo è lo scritto del Prof. Staude, scritto che, come tutti quelli che fanno parte della collezione dei « Teubners Lehrbücher », si propone di dare del soggetto trattato un'esposizione

Digitized by Google

corrispondente allo stato attuale della scienza. Per le accurate determinazioni de' segni delle figure considerate e per le diffuse ed esatte notizie storiche che contiene si sarebbe tentati di paragonarlo all' « Analytische Geometrie » del Baltzer; ma lo stile un po' prolisso in cui è scritto è assolutamente agli antipodi con quello, veramente tacitiano, del compianto professore dell'Università di Giessen. L'A. parte (sia sulla retta che nel piano e nello spazio) dai più semplici sistemi di coordinate e giunge gradatamente e per la via più agevole e piana alle più generali coordinate projettive; arriva così a porgere al lettore tutte le desiderabili informazioni intorno la struttura, la natura e l'uso degli strumenti di cui oggi dispone chi voglia studiare le curve, le superficie ed i complessi, strumenti che l'A. intende di applicare alle quàdriche in un volume attualmente in gestazione. Ci sia lecito notare che per l'eleganza dei calcoli, la lucidità del dettato e la somiglianza del tema, il libro dello Staude rievoca negli antichi discepoli del Prof. d' Ovidio il ricordo della *Geometria analitica* di questo indimenticabile maestro (la quale, sia detto per incidenza, fuor d'Italia è conosciuta assai meno di quanto meriterebbe).

Maggiori pretese di sostanziali innovazioni possiede la terza delle opere che annunziamo. I concetti che la informano vennero da tempo esposti da uno degli autori (l'Heffter) in una pubblica conferenza *Ueber das Lehrgebäude der Geometrie insbesondere bei analytischer Behandlung* (Jahresber. der Deutsch. Math. Ver., XXII Bd., 1903); essi ritrovansi dichiarati nella Prefazione, da cui giova estrarre le seguenti linee « Abbiamo desiderato ordinare la materia sistematicamente in modo che ogni argomento trovasse un posto che gli compete in base a ragioni agevolmente percepibili, che ogni passo della ricerca si compisse con necessità evidente. Ciò non si poteva ottenere che introducendo al più presto il concetto di gruppo di trasformazione e col partire dal più ampio dei gruppi da studiare, cioè dal gruppo projettivo, per giungere ai suoi sottogruppi, non già partendo da questi per arrivare a quello. Ci formammo così la convinzione che si dovesse cominciare dalla geometria projettiva, che poi, introducendo gli elementi impropri, si dovessero trattare le relazioni geometriche invarianti rispetto a tutte le trasformazioni affini, cioè la « geometria affine », e questa finalmente, coll'introduzione del cerchio immaginario all'infinito, mutare nella geometria invariante rispetto a tutte le trasformazioni per similitudine o « equiformi », che noi chiamiamo pure « geometria equiforme ». La geometria projettiva somiglia, quindi, alla delineazione di un quadro, che nella geometria affine riceve una tinta e nella equiforme una seconda, per produrre finalmente in noi l'ordinaria impressione ». Queste parole caratterizzano sufficientemente

Digitized by Google

l'attitudine degli autori. Lo spazio non ci consente di arrestarci ad esporre particolareggiatamente il modo con cui detti concetti vengono svolti ed applicati alla geometria delle forme di I e II specie, alle rette, alle coniche ed ai sistemi da questi formati. Solo notiamo che tutti i tre volumi annunciati mostran essere ormai generale la convinzione che la geometria analitica non può più insegnarsi separatamente dalla geometria projettiva; è l'idea che Luigi Cremona ha da tempo sostenuta ed attuata!

G. L.

E. SCHRÖDER. — *Vorlesungen über die Algebra der Logik (exakte Logik)*. II Band. II Abtheilung, herausgegeben im Auftrag der deutschen Mathematiker-Vereinigung von E. MÜLLER. Mit einem Bilde Ernst Schröders. Leipzig, Teubner, 1905, 8.° gr., p. XXIX+206 [Prezzo Mk. 8].

Della poderosa opera del compianto Prof. Schröder vennero pubblicati durante la sua vita il vol. I (1890), la I Parte del II (1891) e la I del III (1895). Col volume che oggi annunziamo se l'opera stessa non è completa, resta però almeno colmata una lacuna che essa presentava. Tale volume venne redatto mediante materiali, quasi pronti per la stampa, lasciati dall'autore; il Prof. Müller vi aggiunse alcune pregevoli note e completò l'elenco bibliografico schizzato dall'autore stesso. Questa parte dell'opera dello Schröder, essendo principalmente di indole critica e polemica, mal si presta ad essere compendiata; ci è quindi forza limitarci a questo semplice annunzio.

G. L.

PROGRAMMI E RIASSUNTI DI CORSI UNIVERSITARI

UNIVERSITÀ DI MESSINA

CORSO DI FISICA-MATEMATICA

del Prof. R. MARCOLONGO

Anno 1905-06.

1. Preliminari.

Gradiente di una funzione. — Divergenza e rotazione di un vettore. — Campi vettoriali. — Linee di flusso. — Campi solenoidali e lamellari. — Formule per il calcolo della divergenza e della rotazione

Digitized by Google

di un prodotto vettoriale, ecc. — Teorema sulla variazione del flusso. — Lemmi di Green. — Applicazioni all' Idrodinamica.

2. Elettrodinamica dei corpi in riposo.

Equazioni di Maxwell-Hertz e conseguenze più notevoli. — Teorema di Poynting. — Forze magnetiche delle correnti stazionarie.

Correnti lineari. — Potenziale di una corrente lineare. — Legge elementare di Laplace. — Potenziale di un corpo magnetico; potenziale mutuo di due corpi magnetici; di due correnti lineari. — Formule di Ampère, Neumann, Weber. — Azione reciproca elementare tra due elementi di corrente — Lavoro elettromotore. — Energia di un sistema di correnti.

Brevi cenni sui potenziali ritardati. — Equazione generalizzata di Poisson. — Integrali funzionali delle equazioni di Maxwell-Hertz.

Convezione elettrica. — Campo eletromagnetico generato da cariche in moto di traslazione. — Traslazione uniforme parallelamente ad un piano conduttore indefinito. — Esperienze di Rowland, Cremieu, Pender.

3. Elettrodinamica dei corpi in movimento.

Teoria di Hertz. — Induzione magnetica in una sfera ruotante intorno ad un diametro. — Le forze ponderomotrici nella teoria di Hertz. — La forza di Hertz. — Critica della teoria.

4. La teoria di Lorentz.

Elettroni. — Ipotesi fondamentali. — Le cinque equazioni di Lorentz e loro integrali funzionali. — Applicazione delle equazioni di Lagrange al calcolo della forza elettromagnetica dell' elettrone.

La teoria di Lorentz e i principi fondamentali della Dinamica classica. — I due teoremi dell' impulso.

Integrazione dell' equazione generalizzata di Poisson per condizioni iniziali arbitrarie. — Integrali delle equazioni di Lorentz. — Caso del campo inizialmente elettrostatico. — Il vettore di Hertz.

Modello elettromagnetico di una sorgente luminosa. — Campo determinato da un solo elettrone che compie vibrazioni armoniche. — Dipolo elettrico. — Fenomeno di Zeemann.

Le equazioni dell' elettrodinamica dei corpi in riposo dedotte dalla teoria di Lorentz. — Considerazioni sui valori medi. — Elettroni di

Digitized by Google

polarizzazione, di conduzione, di magnetizzazione. — Confronto colla teoria di Maxwell — Hertz. — Esperienze di Eichenwalds.

Elettrodinamica dei corpi in moto secondo Lorentz. — Le due equazioni fondamentali. — Confronto colla teoria di Hertz. — Esperienze di Wilson.

NOTIZIE

ABHANDLUNGEN ZUR GESCHICHTE DER MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN. Come araldo del XX volume di questa importante raccolta abbiamo ricevuto l'interessante articolo di F. Müller *Karl Schellbach, Rückblick auf sein wissenschaftliches Leben. Nebst zwei Schriften aus seinem Nachlass und Briefen von Jacobi, Joachimsthal und Weierstrass*, il quale va segnalato a coloro che desiderano conoscere tutte le idee dei tre sommi scienziati citati nel titolo or riferito.

Il vol. XXI della medesima raccolta porge un notevole contributo alla letteratura ed è nuovo sintomo del salutare risveglio di studi intorno al sommo filosofo-matematico Leibniz, risveglio al quale il nostro *Bollettino* non è estraneo (cfr. T. II, 1899, p. 113-116) e di cui già segnalammo varî sintomi (*Bollettino* VI, 1893, p. 30 e 126; IX, 1906, p. 30). Eccone il titolo: *Leibnizens nachgelassene Schriften physikalischen, mechanischen und technischen Inhalts. Herausgegeben und mit erläuternden Anmerkungen versehen von* E. Gerland. Mit 200 Figuren im Text. L'editore (già noto per avere pubblicato il carteggio di Leibniz ed Huygens con Papin e come autore di una storia della fisica pratica), non solo ha coscienziosamente adunati tutti gli scritti di Leibniz dell'indicata specie e ne ha curata la riproduzione diplomatica, ma li ha corredati di succosi commenti; gli squarci in questione sono scritti in tedesco, latino o francese e, come dice il Gerling, si direbbero costituire un « carteggio di Leibniz con sè stesso ».

***

PUBBLICAZIONI RECENTI SULLA STORIA DELLE MATEMATICHE. F. Ricci, *Paolo Frisi e la composizione dei moti rotatori* (Riv. geografica italiana, t. 13, 1906).

F. Amodeo, *I trattati delle sezioni coniche da Apollonio a Simson*, Napoli, 1906. [In questa prolusione al suo corso ufficiale di storia

Digitized by Google

delle matemache dell' Università di Napoli, l'A. fa, tra l'altro, rilevare come i meriti del Simson siano più grandi di quanto ritennero Chasles e Cantor].

J. H. Graf. *Zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften an der ehemaligen Akademie und der Hochschule Bern. Rektoratsrede gehalten den 25 November 1905*. Mitth. der naturforsch. Gesell. in Bern, 1896. [Contiene interessanti notizie intorno alla storia del principio della minima azione ed alla più vicace questione scientifica del secolo XVIII, da esso originata, ed intorno alla vita e alle opere di R. Wolf e L. Schläfli, del quale ultimo si pensa a ripubblicare tutte le opere già edite, in uno alle principali inedite].

***

Carteggio di Huygens. Con il X vol. delle *Oeuvres complètes de Christiaan Huygens*, pubblicato sullo scorcio del 1905, fu completata la pubblicazione delle lettere scritte o ricevute da quel grande. Nei tremila numeri sparsi in quei preziosi volumi si trovano innumerevoli dati sulla storia della matematica e della fisica, dei quali dovrà tenere il massimo conto chi si accingerà in avvenire a narrare la storia del fortunoso periodo in cui maturarono i nuovi calcoli. Onde la Società Olandese delle scienze, col mettere a disposizione di tutti tanti e così preziosi documenti, col corredarli di sobri ma lucidi commenti, col dare esatte notizie intorno a tutte le persone citate, si è resa benemerita verso coloro che s'interessano della storia delle scienze esatte; i voti dei quali la seguono mentre si appresta a proseguire l'opera così splendidamente cominciata.

***

La casa di Eulero a Berlino. G. Valentin è riuscito a stabilire che la casa abitata e posseduta da Eulero durante il suo soggiorno (1741-1766) a Berlino è quella che porta attualmente il N. 41 nella Behrenstrasse; egli fa voti che, in occasione del prossimo (15 Aprile 1907) secondo centenario dalla nascita di quel grande, su quella casa venga posta una lapide commemorativa; possa tale voto venire esaudito!

***

Tema proposto dall'Università di Kiel per l'anno 1906-7: Stabilire, per le equazioni differenziali ipergeometriche di 3.° ordine con due punti singolari al finito, le relazioni che passano tra gli integrali dei vari campi.

Digitized by Google

⁂

MONUMENTO A L. CREMONA. La sottoscrizione per elevare un ricordo marmoreo a L. Cremona diede finora un risultato pari a Lire 6850; le offerte devono dirigersi all'Ing. I. Sonzogno, Segretario della R. d'applic. per gl'ingegneri, Roma; l'esecuzione del progettato monumento venne già assunta dallo scultore Monteverde.

⁂

UN GRANDE NELL'OBLIO. Sotto questo titolo il periodico *La Sicilia universitaria*, nel suo secondo anno di vita, pubblica una serie di articoli per ottenere che a Siracusa venga elevato un monumento, od un grande istituto matematico-fisico, in memoria di Archimede.

⁂

PER GLI AMATORI DI RITRATTI. Anunziamo con piacere che del *Portofolio of portraits of eminent mathematicians* (cfr. *Bollettino*, VIII, 1905, p. 95) venne pubblicata una seconda parte, contenente le effigi (alcune delle quali tolte da statue) di B. Pascal, Giovanni e Giacomo Bernoulli, Gauss, Lagrange, l'Hospital, Cavalieri, Eulero, Monge, Laplace, Tartaglia e Barrow.

⁂

IL IV VOL. DEI RESOCONTI DELLE SEDUTE DELLA SOCIETÀ MATEMATICA DI BERLINO (Leipzig, Teubner, 1905) contiene memorie di Hessenberg, Müller, Reissner, Rothe, Salkowski, Sandor, Schirdewan, Schur, Skutsch, Wallenberg, Zacharias e Zühlke.

⁂

LA LOGICA E LA FILOSOFIA CONTEMPORANEA è il titolo della prolusione ad un corso di *Storia della logica formale moderna* tenuta dal noto filosofo L. Conturat l'8 Dicembre 1905 al Collegio di Francia e pubblicata nel T. XIII (1906) della *Revue de métaphysique et de morale*. Essa, non meno del corso a cui prelude, interesserà tutti coloro che tengono nel dovuto onore la storia delle scienze.

Bestonzo Pietro, Gerente.

Genova - Tipografia R. Istituto Sordomuti - 1906.

Digitized by Google

CARLO CLAUSEN

HANS RINCK Succ.

LIBRAIO DELLE LL. MM. IL RE E LA REGINA

e della R. Accademia delle Scienze di Torino

11, Via Po — TORINO — Via P.., 11

La Libreria Carlo Clausen

spedisce gratuitamente a chi lo richiede i seguenti Bollettini trimestrali:

N. I. Bollettino di Scienze Mediche
» II. Bollettino di Scienze Tecniche
» III. Bollettino di Novità Letterarie
» IV. Bollettino di Scienze Naturali

e s'impegna, a richiesta, di tenere correntemente informati i Clienti di tutte le pubblicazioni in qualunque lingua che si riferiscano ai loro studi speciali.

CATALOGO ANTIQUARIO

MATEMATICA

FISICA

ASTRONOMIA

Si spedisce *gratis* a chi ne fa richiesta

Digitized by Google

SOMMARIO DEL FASCICOLO

G. LORIA. *Matematica e matematici del Giappone.*

RECENSIONI ED ANNUNZI.

P. H. SCHOUTE. *Mehrdimensionale Geometrie.* II [G. L.].
C. A. LAISANT. *Initiation mathématique* [G. L.].
F. CALDARERA. *Corso di meccanica razionale* [T. LEVI-CIVITA].
N. NIELSEN. *Handbuch der Theorie der Gammafunktion* [G VIVANTI].
E. CZUBER. *Differential-und Integralrechnung* I. Bd., II. Aufl. [G. VIVANTI].
G. L. ARRIGHI. *La storia della matematica* [G. L.].
G. CASTELNUOVO. *Geometria analitica e projettiva.* II Vol. [U. AMALDI].
J. E. CAMPBELL. *Introductory Treatise on Lie's Theory* [U. AMALDI].
F. GOMES TEIXEIRA. *Tratad de las curvas especiales notables* [G. L.].
W. H. BLYTHE. *On models of cubic surfaces* [G. L.].
C. GUICHARD. *Sur les systèmes triplement indéterminés* [G. L.].
H. WIELEITNER. *Theorie der ebenen alg. Kurven* [G. L.]
V. UND K. KOMMERELL. *Allgemeine Theorie der Raumkurven und Flächen* [G. L.].
H. SCHUBERT. *Auslese aus meiner Unterrichts-und Vorlesungspraxis.* II [G. L.].
J. THOMAE. *Grundriss einer anal. Geom. der Ebene.* STAUDE, *Analytische Geometrie.* HEFFTER UND KOEHLER, *Analytische Geometrie,* I [G. L.].
R. SCHRÖDER. *Vorlesung über die Algebra der Logik.* II. Bd., II. Abth. [G. L].

PROGRAMMI E RIASSUNTI DI CORSI UNIVERSITARI

Università di Messina: Corso di Fisica matematica [R. MARCOLONGO].

NOTIZIE.

Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften. — Pubblicazioni recenti sulla storia delle matematiche. — Carteggio di Huygens. — La casa di Eulero a Berlino. — Tema proposto dall' Università di Kiel per l' anno 1906-7. — Monumento a L. Cremona. — Un grande nell' oblio. — Per gli amatori di ritratti. — Il IV vol. dei Resoconti delle sedute della Società matematica di Berlino. — La logica e la filosofia contemporanea.

IL BOLLETTINO DI BIBLIOGRAFIA E STORIA

DELLE

SCIENZE MATEMATICHE

si pubblica a fascicoli trimestrali di almeno 32 pagine cadauno.

L'abbonamento è fissato al prezzo annuo di **L. 6** per l'Italia e di **L. 7,50** per l'Unione Postale, *pagabili anticipatamente.*

Gli abbonamenti si ricevono presso l'editore **Carlo Clausen (Hans Rinck Succ.)** in **Torino** - Via Po, N.° 11 - e presso i principali librai d'Italia e dell'estero.

Per quanto concerne l'Amministrazione rivolgersi esclusivamente all'Editore stesso. Indirizzare invece lettere, manoscritti, libri, giornali e tutto ciò che riflette la Redazione al **Prof. Gino Loria** della R. Università di **Genova.**

Digitized by Google

BOLLETTINO DI BIBLIOGRAFIA

E

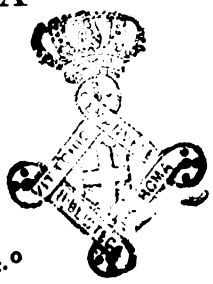
STORIA

DELLE

SCIENZE MATEMATICHE

pubblicato per cura di

GINO LORIA



Anno IX – Fasc. 4.°

TORINO
CARLO CLAUSEN (HANS RINCK Succ.)
Libraio delle LL. MM. il Re e la Regina

1906.

Digitized by Google

Opere del Prof. GINO LORIA

della R. Università di Genova

IL PASSATO ED IL PRESENTE

DELLE PRINCIPALI

TEORIE GEOMETRICHE

Seconda edizione accresciuta ed interamente rifatta

Lire 8.

SPEZIELLE

algebraische und transscendente

EBENE KURVEN

THEORIE UND GESCHICHTE

Autorisierte, nach dem italienischen Manuskripte bearbeitete deutsche Ausgabe

von

FRITZ SCHÜTTE

Mit 174 Figuren auf 17 lithographirten Tafeln

Mark 28.

LE SCIENZE ESATTE

NELL' ANTICA GRECIA

Libro I e II: *esauriti.*

Libro III. - **Il substrato matematico della filosofia naturale dei Greci. L. 4 —**

Libro IV. - **Il periodo argenteo della geometria greca . . . . . „ 4 —**

Libro V. - **L' aritmetica dei Greci . . . . . „ 5 —**

LE

TRASFIGURAZIONI DI UNA SCIENZA

DONNE MATEMATICHE

Seconda edizione accresciuta di note

Lire 2.

Per commissioni rivolgersi alla

Libreria CARLO CLAUSEN – HANS RINCK Succ.

Via Po, 11 — TORINO — Via Po, 11

Digitized by Google

BOLLETTINO DI BIBLIOGRAFIA E STORIA
DELLE
SCIENZE MATEMATICHE
ANNO IX. — **Ottobre, Novembre e Dicembre** 1906.

RECENSIONI ED ANNUNZI

J. HJELMSLEV. — *Deskriptivgeometri. Grundlag for Forelaesninger paa polyteknisk Laereanstalt. Tegningerne udforte af Assistent* H. Christensen. 8° gr., p. 246, con Atlante di 26 Figure. Kjobenhavn, J. Gjellerup. 1904.

Come lo dice il titolo, quest'opera non pretende d'essere un trattato completo di geometria descrittiva, ma semplicemente un manuale sussidiario per l'insegnamento in una scuola politecnica; di ciò devesi tener conto nel giudicarla. Giacchè se, dal punto di vista dottrinale, la promiscuità in cui si trova la geometria projettiva con la geometria descrittiva può biasimarsi, in quanto cancella i confini esistenti fra quelle scienze e rende impossibile discernere le caratteristiche di ciascuna, essa è spiegabile e lodevole quando si consideri che l'A. fu trascinato nel campo teorico della geometria projettiva con l'intento di rendere più agevole e scientifico l'insegnamento di una scienza della massima utilità per l'ingegnere. Appunto tenendo conto di tale intento dell'opera che analizziamo si trova il perchè essa si apre con l'esposizione delle proposizioni e costruzioni essenziali dell'assonometria, di cui è noto il vasto campo di applicazione. Seguono i concetti di elementi all'infinito e quindi le nozioni fondamentali della projezione centrale (tanto come procedimento d'indagine quanto come metodo di rappresentazione), la teoria del rapporto anarmonico, della prospettiva di figure piane o solide, della projettività fra fasci di raggi e punteggiate, dell'involuzione e della polarità rispetto al cerchio (questi ultimi introdotti per dedurne la legge di dualità); chiude il I Cap. un paragrafo sulle costruzioni ausiliari che conviene usare quando non tutti i dati cadono entro i limiti del disegno (alcune relative al cerchio sono nuove e risolte elegantemente) (1).

(1) Siaci lecito riferire le due seguenti che potrebbero trovare posto in qualunque trattato di geometria elementare:

Digitized by Google

Il II Cap. è tutto dedicato alle coniche (sezioni del cono circolare retto), di cui l'A. fa note tanto le proprietà projettive, quanto quelle metriche, tanto quelle generali quanto quelle speciali a ciascuna varietà.

Nel III Cap. sono stabilite le proprietà fondamentali delle curve piane; l'A. ne insegna le proprietà e le proposizioni fondamentali mediante considerazioni sintetiche (basate esclusivamente sull'intuizione) o cinomatiche, e ne fa applicazioni alle curve cicliche, alle evolute, agli inviluppi, alle podarie ed alle podoidi da lui chiamate *Modpunktskurver* (una qualunque di queste nasce come luogo dei punti simmetrici di un punto fisso rispetto alle tangenti di una curva, ond'è omotetica della corrispondente podaria).

Il Cap. IV è tutto consacrato alle superficie di rotazione. Premesse alcune poche generalità sulle curve sghembe (e loro tangenti) e su la superficie in genere (e loro piani tangenti), l'A. espone le proprietà essenziali di quella categoria di superficie e la loro rappresentazione canonica col metodo di Monge; insegna a costruire le intersezioni di una di esse con un piano, con altra superficie analoga (assi non sghembi), nonchè i coni circoscritti; particolarizza poi i risultati ottenuti supponendo che la superficie di rivoluzione sia generata dalla rotazione di una retta attorno ad altra che non l'incontra, e così ha il mezzo di risolvere altre questioni importanti relative a tutte le superficie rotonde. Chiudono il Cap. alcune osservazioni relative alle quadriche di rotazione. Le quadriche in generale formano poi il soggetto del Cap. seguente, nel quale giova notare (p. 141) un'incidentale dimostrazione del teorema di Pohlke; le superficie sviluppabili e le superficie inviluppi in genere sono considerate nel Cap. VI, ove, in particolare, si trova una completa trattazione dei problemi relativi a coni e cilindri, nonchè una succosa esposizione dei teoremi e dei problemi concernenti le eliche e le superficie costituite dalle loro tangenti. Il Cap. VII tratta delle superficie rigate sghembe in genere; in particolare dei conoidi, del cilindroide (di Frégier), del passaggio obliquo e delle superficie costituite dalle normali ad una superficie (in ispecie del 2.° ordine)

I. *Costruire la tangente in* A *al cerchio determinato de' tre punti* A, B, C.

Si determinino il punto M in cui AC è incontrata dalla perpendicolare condotta da B ad AB ed il punto N in cui AB è incontrato dalla perpendicolare condotta da C ad AC; la retta MN riescirà parallela alla tangente richiesta.

II. *Trovare l'intersezione di un cerchio* $\triangle$ *lateramente tracciato col cerchio* $\triangle$ *determinato dai 3 punti* A, B, C.

Si conducano due cerchi ausiliari, uno A per A e C, l'altro B per B e C, i quali taglino entrambi Γ. L'asse radiale a di Γ e $\triangle$ passa per l'intersezione M dagli assi radici di A, Γ e A, $\triangle$, onde è subito determinato: esso passa poi pel punto N comune agli assi radicali di B, Γ e B, $\triangle$ che è pure facile ottenere: a è quindi la retta MN e le sue intersezioni con Γ sono i punti richiesti.

Digitized by Google

nei punti di una sua sezione piana. Altre due importanti categorie di superficie danno materia al Cap. VIII, cioè le superficie elicoidi in generale e le superficie topografiche: queste ultime porgono all'A. il destro per esporre l'essenza del metodo dei piani quotati. Chiude l'opera una sommaria esposizione della teoria delle ombre.

Lo stile in cui è redatta quest'opera è conciso, ma chiaro; le argomentazioni possiedono quel grado di rigore che possono raggiungere quelle, indipendenti da coordinate, che si riferiscono a curve e superficie in generale; le figure sono numerose, semplici ed espressive; per tutta l'opera sono sparsi ben 250 esercizi. Per tutte queste ragioni e perchè abbraccia tutte le questioni essenziali della geometria descrittiva, essa sarebbe meritevole di una diffusione nel mondo maggiore di quanto è presumibile consenta la lingua in cui è scritta.

G. L.

H. Burchard Fine. — *A College Algebra*. Ginn and Comp., 1905, 8°, p. VIII + 595.

Il libro « *A College Algebra* » del Fine è un trattato elementare, in cui si svolgono le teorie algebriche, che da noi si insegnano negli Istituti tecnici, e parte di quelle che, sotto il nome di « Algebra complementare », sono svolte nel primo corso delle nostre Facoltà di Scienze. Il libro è diviso in due parti. La prima tratta del concetto di *numero*, e costituisce un tentativo di esporre in un trattato, destinato alle scuole, le parti fondamentali dell'Aritmetica col massimo rigore, tenendo conto degli studi recenti logico-matematici, e di alcuni concetti dovuti alla teoria degli « *insiemi* ». In ciò si avvicinerebbe, pur discostandosi sotto molti riguardi, ai trattati, ormai non più rari in Italia, che aspirano al massimo rigore deduttivo: dico, si avvicinerebbe; ma in ciò voglio soltanto alludere allo spirito critico, e, direi quasi, filosofico, che arieggia nella prima parte del libro.

Tanto basta però per poter asserire che un giovane, che per la prima volta studiasse l'algebra, e volesse seguire il trattato del Fine, dovrebbe senz'altro saltarne a piè pari le prime 70 facciate, che potrebbero invece servire a meditazioni ed a discussioni non inutili per chi le leggesse dopo aver studiato il resto del libro. Sarà bene esaminare un po' minutamente l'esposizione del Fine.

Il Fine parte dal concetto di *classe* (group), o, come si diceva nei trattati più vecchi, di *collezione* di oggetti, e ammette come concetto non definito, il concetto di *corrispondenza biunivoca* tra due classi, definendo poi il *numero cardinale di una classe* come la proprietà di una classe che è comune ad essa e a tutte quelle che con essa si possono porre in corrispondenza biunivoca. Osserviamo però che, per quanto

Digitized by Google

si possa anche sostenere che le proprietà delle classi sono oggetto di studio piuttosto della logica pura che dell'aritmetica. si sarebbe forse fatto cosa migliore, premettendo uno studio su queste proprietà, distinguendo le proprietà assunte a priori, da quelle dimostrabili. Ciò avrebbe forse giovato a quel completo rigore che l'A. vuole raggiungere; egli non avrebbe dovuto, p. es., interrompere a pag. 5 il suo ragionamento per dimostrare a piè di pagina un teorema sulle classi. Così pure a pag. 3, quando egli (definite le *classi* finite come quelle classi che non si possono porre in corrispondenza biunivoca con una loro parte) dice che di due classi finite non equivalenti, una è equivalente a una parte dell'altra, il lettore non resterebbe incerto per sapere se questa proposizione è un teorema o un postulato.

A pag. 4 il Fine definisce un insieme (list) di numeri cardinali, come insieme dei numeri corrispondenti alla classe formata da un unico oggetto, e alle classi che se ne deducono aggiungendovi un oggetto successivamente. Dimostra che tutti i numeri di questa « list » sono finiti, ossia corrispondono a classi finite, e viceversa che ogni numero cardinale « finito », entra in quella « list ». Dimostrato che la « list » di numeri così definita forma un sistema ordinale, parla poi dell'operazione di *contare* (counting), riferendosi, naturalmente ai soli gruppi finiti. Definite l'addizione e la moltiplicazione, ne dimostra le proprietà fondamentali: proprietà associativa, commutativa, ecc. Definita la sottrazione, è condotto all' introduzione dei numeri negativi, che restano definiti soltanto dalla posizione che occupano nella scala..... — 3, — 2, — 1, 0, 1, 2, 3.....

Si definiscono quindi le operazioni sui numeri negativi, dimostrando che dette definizioni sono scelte in guisa da conservare alle operazioni aritmetiche le loro proprietà fondamentali (proprietà associativa, commutativa, ecc.). Definita e studiata in modo rigoroso la divisione dei numeri interi, si pone per definizione $\frac{a}{b} \gtrless \frac{c}{d}$ secondo che $a\,d \gtrless b\,c$ (supposto che a, b, c, d, siano positivi). I numeri interi, e i nuovi simboli così introdotti, formano quindi un sistema *ordinale:* le frazioni non sono per il Fine che i nuovi simboli $\frac{a}{b}$ definiti puramente dalla loro posizione in detto sistema ordinale. Il sistema dei numeri *razionali* appare quindi subito come un sistema *denso*, tale cioè che tra due numeri razionali disuguali vi sono altri numeri razionali Si definiscono poi le operazioni sulle frazioni, dimostrando che per esse valgono le proprietà consuete, e si da un cenno sull'uso delle frazioni per la misura dei segmenti (razionali). Lo studio delle divisioni dei numeri razionali in due classi, tali che ogni numero della prima preceda tutti i numeri della seconda, conduce alla nozione di numeri incommensurabili e di classi contigue. Si dimostra che l'insieme dei numeri *reali* è continuo,

Digitized by Google

in quanto che, dividendo il sistema di questi numeri in due classi, tali che ogni numero della prima preceda ogni numero della seconda, avviene sempre uno e uno solo di questi due casi: 1° Esiste un primo numero della seconda classe; 2° Esiste un ultimo numero della prima classe. I primi rudimenti della teoria dei limiti, e la misura dei segmenti chiudono lo studio dei numeri reali. I numeri complessi sono definiti come un nuovo sistema di segni, di cui il più semplice è i (the unit of imaginaries). Dal punto di vista didattico mi sarebbe sembrato forse più opportuno definire tali numeri come una coppia di numeri reali (x, y), ponendo $1 = (1, 0)$, $i = (0, 1)$ e definendo le operazioni su tali coppie di numeri.

La seconda parte del libro, che è la più lunga (pag. 79-589) è notevole anzitutto:

1° Per la grande copia di esercizi;

2° Perchè si fa uso della rappresentazione grafica nello studio delle equazioni di 1° e di 2° grado in due incognite; e certo riuscirebbe di grande utilità all'insegnamento nelle nostre scuole, se si introducesse l'equazione della retta e delle coniche, come mezzo per rendere più evidente e più chiaro lo studio analitico dei sistemi di equazioni algebriche in due incognite;

3° Per la chiarezza e semplicità della trattazione;

4° Per l'ordinamento, quasi sempre scelto nel modo più opportuno, dei varii capitoli del libro.

Darò un rapido sommario del contenuto di questa seconda parte. In essa sono svolti il calcolo letterale, le operazioni sui polinomii, le equazioni di primo grado, i sistemi di tali equazioni (senza ausilio di determinanti) con applicazioni ed esempi grafici. Si passa poi allo studio della divisione dei polinomii, alla loro decomposizione in fattori (con speciale riguardo al polinomio $x^2 + px + q$), dimostrando l'equivalenza dei due problemi: risolvere un'equazione algebrica, decomporre un polinomio in fattori lineari. Si passa quindi alla teoria del massimo comun divisore e del minimo multiplo comune, alla teoria delle frazioni algebriche, con un breve cenno della teoria delle forme indeterminate $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 . \infty$ ecc., a cui si può giungere nei calcoli algebrici, e della teoria della decomposizione in frazioni semplici di una frazione il cui denominatore si sappia già decomporre in fattori lineari. Si passa quindi alle funzioni simmetriche e ciclo-simmetriche, alla formola del binomio, alle regole per estrarre le radici quadrate e cubiche, al calcolo dei radicali, alle equazioni di secondo grado, ai sistemi di tali equazioni, con molti e interessanti esempi di equazioni e di sistemi di equazioni risolubili con radicali quadratici. L'analisi indeterminata di 1° grado è studiata servendosi dell'algoritmo per trovare il M. C. D.

Digitized by Google

di due numeri interi; brevi capitoli sono dedicati alle progressioni aritmetiche, geometriche, armoniche, e all'interpolazione (formola di Lagrange). La teoria delle potenze con esponente qualunque serve a definire i logaritmi, di cui si fa qualche applicazione alla teoria delle equazioni esponenziali, degli interessi composti, delle annualità. Qualche pagina è dedicata al calcolo combinatorio, alla teoria delle probabilità, che l'A. definisce nel caso che esista soltanto un numero finito di casi possibili o che si posseggano tavole statistiche. Ammesso il teorema di d'Alembert, si dà il metodo per trovare le radici razionali di una equazione algebrica, si danno le relazioni fra coefficienti e radici di un'equazione, si danno pochi cenni sulla teoria della trasformazione delle equazioni, si espongono la regola di Cartesio, il metodo di Horner, il metodo per trovare le radici multiple di un'equazione (deducendolo dalla formola del Taylor), i teoremi di Rolle, di Sturm, i primi teoremi sulle funzioni simmetriche delle radici, i metodi per risolvere le equazioni di terzo e quarto grado. Dimostrate, col metodo usuale, le *prime* e *più semplici* proprietà dei determinanti (senza però usare la notazione dei doppi indici), si studiano le *prime* loro applicazioni ai sistemi di equazioni lineari, al risultante e al discriminante delle equazioni algebriche.

Poche pagine sono dedicate ai teoremi fondamentali della teoria delle serie, alle serie binomiale, esponenziale e logaritmica, e infine alla teoria dei prodotti infiniti, delle frazioni continue (con applicazione all'analisi indeterminata), alla teoria delle funzioni continue, dei limiti inferiore e superiore di un gruppo lineare di punti, da cui si deduce la dimostrazione del teorema di d'Alembert ammesso più sopra.

Ben poche e di ben piccola importanza sono le osservazioni che si possono fare. Il cenno a pag. 283 del teorema generale del binomio si poteva *forse* omettere, non essendo ancora nota al lettore la teoria delle serie; la teoria delle permutazioni e combinazioni si poteva premettere con vantaggio alla formola del binomio. Non è vero quanto dice l'A., a pag. 510 (righe 1-9), *certamente per una svista,* che, se sono nulli i minori del prim'ordine del determinante, formato coi coefficienti di tre equazioni lineari non omogenee in tre incognite, allora ogni soluzione di una di queste equazioni è soluzione anche delle altre. In ogni modo la teoria dei sistemi di equazioni lineari era forse degna di un maggiore svolgimento.

Nel capitolo dedicato ai logaritmi si sarebbe potuto facilmente dimostrare senz'altro con ogni rigore per mezzo della teoria delle classi contigue, che ogni numero positivo possiede un logaritmo.

Ma queste e simili osservazioni non diminuiscono il valore di questo libro coscienziosamente studiato, di cui io consiglio la lettura a chi, uscito dalle nostre scuole secondarie, voglia dedicarsi a studi mate-

Digitized by Google

matici. Io credo anzi che, completato in qualche punto, il trattato del Fine sarebbe ottima guida agli studenti delle nostre Università, che vi imparerebbero a trattare con rigore i fondamenti della scienza, e vi potrebbero apprendere tutti i capitoli essenziali dell'algebra cosidetta complementare.

G. Fubini.

M. Simon. — *Über die Entwickelung der Elementar-Geometrie im XIX. Jahrhundert. Bericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung.* Mit 28 Figuren im Text. Leipzig, Teubner, 1906, 8°, p. VIII + 276 [Prezzo del vol. leg. Mk. 9].

La presente Relazione sullo sviluppo della geometria elementare nel secolo XIX venne progettata ed eseguita nell'intento di venire inserta nell'*Encyclopädie der math. Wissenschaften;* ma, per ragioni più di forma che di sostanza, non potè venire accolta ed invece passò a formare il I dei volumi complementari dei *Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung.* Senza elevarci a giudici dell'accennato dissidio, due cose vogliamo però notare. Una è che tale e tanta è la quantità di utili notizie e di osservazioni importanti raccolte nella presente pubblicazione che essa sembra destinata a divenire presto e rimanere per molto tempo una guida preziosa per chiunque voglia conoscere la storia e la bibliografia della geometria elementare. L'altra che il modo insueto usato dall'autore per fare le citazioni, spesso colpisce per la sua ben intesa originalità, ma non di rado non raggiunge la desiderata chiarezza. Così l'A. va lodato quando, ad esempio, dopo il nome di Rud. Wolf aggiunge « der Züriche Astronom » (p. 65) e quando in certi casi (v. p. es. p. 19) con dei segni quali (!) e (!!) rileva inesattezze od errori; mentre quando scrive (p. 199)

Rivard (Puissant). Traité de la sphère (Sacrobosco; lectio sphaerica) (1834) non ci sembra raggiungere lo scopo che ogni scrittore deve sempre ricordare, cioè quello di far capire il proprio pensiero.

Sorvolando sopra il grande numero di errori di trascrizione nei quali cadde l'A. (specialmente nei titoli di opere italiane, il che fa stupore data la conoscenza che egli possiede della nostra lingua), notiamo: a pag. 13, linea 20, la svista di collegare il Flauti a Modena invece che a Napoli; a pag. 45, ultime due linee, l'erronea indicazione del Bemporad come autore invece che come editore; a pag. 47, linea 15 dal basso, l'avere annoverato fra le pubblicazioni spagnuole un libro stampato a Tortona; a pag. 83, l'avere ripetuto l'erronea asserzione (che si trova anche nel noto volume dell'Enriques sulle *Questioni riguardanti la geometria elementare*) che ogni problema di

Digitized by Google

terzo grado sia riducibile alla trisezione dell'angolo, mentre è noto che, quando esso ha una sola radice reale, è riducibile alla duplicazione del cubo; ed a pag. 175 l'avere annoverate le ricerche sulla sezione di ragione, di spazio o determinata fra quelle relative alla sezione aurea. Aggiungiamo che fra le indagini relative al teorema affermante essere isoscele un triangolo avente due bisettrici fra loro eguali, avrebbe dovuto essere ricordata anche quella del Sylvester (cf. *Bollettino*, VII, 1905, p. 53 n.) mentre fra gli studi relativi a triangoli speciali quelle generali di E. Wölffing (*Ueber specielle Dreiecke;* Würtemberg Mitth., II Ser., IV vol. 1902, p. 44) e quelle più speciali e recenti dello Schubert (cf. *Bollettino*, p. 90 del presente vol).

Ci sembra poi mancare qualche cenno sulla *nomenclatura geometrica*, che, specialmente nella patria dell'A., diede origine a vivaci questioni fra coloro che accettavano i nomi di origine latina o greca e coloro (fra cui basti ricordare il Grassman) che non volevano se non termini tecnici prettamente tedeschi. Nè crediamo sia da tacere che noi non possiamo approvare il severo giudizio dell'A. sopra la *Geometrografia* del Lemoine, la quale – malgrado le imperfezioni che presenta — per lo scopo che si prefigge e per la suggestività che possiede ci sembra meritevole della stima che per essa molti professano.

E finiremo riproducendo l'indice del discorso volume:

I. *Parte generale.* 1. Limiti della presente Relazione e punti di vista generali. 2. Storia. 3. Metodi. 4. Trattati e raccolte d'esercizi.

II. *Parte speciale.* A. Teoria delle parabole. B. Cerchio. C. Teoria dell'equivalenza. D. Triangoli. E. Poligoni. F. Configurazioni piane generali. G. Relazioni stereometriche generali. H. Relazioni stereometriche speciali. I. Trigonometria. Indice dei nomi.

G. L.

M. Simon. — *Methodik der elementaren Arithmetik in Verbindung mit algebraischer Analysis.* Mit 9 Textfiguren. Leipzig und Berlin, Teubner, 1906, 8° gr., p. 108 [Prezzo del vol. leg. Mk. 3.20].

Questo ottimo volumetto è il riassunto di un breve corso di lezioni tenuto nell'estate 1901 all'Università di Strasburgo coll'intento di porgere ai laureandi una chiara idea degli scopi e dei mezzi che ha l'insegnamento della matematica nelle scuole secondarie; è, dunque, uno scopo che, almeno in parte, coincide con quelle che si prefiggono le nostre scuole di magistero. Appunto per ciò tale volumetto ci sembra avere anche per noi un interesse speciale. Saremo dunque giustificati se ne imprendiamo un'accurata analisi, dopo di avere notato: che l'A., da un ventennio fautore convinto dell'introduzione del concetto di funzione nell'insegnamento secondario, col presente scritto porge

Digitized by Google

nuovi argomenti a sostegno delle sue idee; che, con le notizie storiche sparse a piene mani, ha insegnato in qual modo ed in quale misura l'elemento storico possa essere convenientemente introdotto nell'insegnamento elementare; e che, usando una forma spigliata e brillante, ha mostrato in qual modo si possa rendere divertente anche l'esposizione degli argomenti più astrusi.

Il I Cap. come è ben naturale, è dedicato al concetto di *numero* ed all'operazione di *contare*; dopo di avere accennato al tentativo fatto dall'Hamilton per fondare tutta l'aritmetica sull'idea di *tempo*, l'A. pone e risolve le questioni: che cose contiamo? perchè contiamo? come contiamo? e, dopo di avere distinti i numeri in cardinali ed ordinali, fa cenno, seguendo G. Cantor, del concetto di *potenza*, che surroga, per i complessi infiniti, il *numero* per quelli finiti.

I due Cap. seguenti trattano dell'addizione e della sottrazione; leggiamo ivi una dichiarazione che giova qui riferire: « Trent'anni fa, senza conoscere Hankel, ma ispirandomi a Weierstrass, io ho ripetutamente tentato d'insegnare l'algebra in modo puramente formale, ma il successo fu così poco incoraggiante, che io non posso che consigliare di porgere possibilmente ai giovani delle rappresentazioni concrete » (p. 12).

Ad essi naturalmente segue uno sull'introduzione dei numeri negativi, ove merita di essere segnalata la proposta dell'A. di indicare un numero negativo con a' invece che con $-a$, innovazione di apparenza modesta, ma che, introdotta già in due manuali scolastici, si è mostrata capace di rendere meno difficile una delle teorie elementari in cui i principianti incontrano maggiori ostacoli.

Seguono due capitoli sulle operazioni di seconda specie (moltiplicazione e divisione), ove vanno notate le nozioni sui numeri transfiniti ed i tipi ordinali del Cantor, capitoli che hanno per naturale complemento altri tre sulle frazioni ordinarie e decimali e sopra i rapporti.

Vengono poi alcune nozioni sulle equazioni, in particolare su quelle di primo grado. « La risoluzione delle equazioni matematiche » (osserva l'A.) « porge l'esercizio classico di ciò che i filosofi chiamano determinazione indiretta di concetto; esso offre la migliore illustrazione del proverbio *dimmi con chi pratichi e ti dirò chi sei* ».

Sotto il titolo « Calcolo con numeri definiti da serie » il Prof. Simon espone in seguito la teoria dei numeri irrazionali ideata da G. Cantor e ne fa un paragone con quelle congeneri del Weierstrass e del Dedekind: ci sia lecito osservare che quella del Weierstrass è stata diffusa per le stampe, oltre che dal Kossak, dal Prof. Pincherle.

Così si hanno elementi per trattare le operazioni di terza specie (elevazione a potenza ed estrazione di radice), a cui è consacrato il XII Cap., per risolvere le equazioni di 2.° grado (XIII Cap).) e per definire, stu-

Digitized by Google

diare e calcolare i logaritmi (XIV Cap.). Gli elementi del calcolo combinatorio, nella misura in cui occorre per stabilire il teorema del binomio, sono esposti nel Capitolo seg. ove merita di essere rilevata una dimostrazione geometrica di notevole eleganza della formola $\frac{1}{1-\rho} = 1 + \rho + \rho^2 + \ldots$, per $|\rho| < 1$, dimostrazione che, pel suo valore didattico, merita attrarre l' attenzione degl' insegnanti. La storia e la risoluzione delle equazioni cubiche (di cui nel Cap. XVI), guidano, per trattare il noto caso irriducibile, ai numeri complessi (Cap. XVII); esaurito col loro mezzo lo studio delle equazioni di terzo grado, l'A. fa cenno della risoluzione di quelle di quarto e dell' irrisolvibilità algebrica di quelle di grado più elevato.

Notevole è il Cap. seguente, ove della formola del binomio vengono tratte la definizione e le proprietà della frazione esponenziale; stabilita l' irrazionalità di e, il Prof. Simon fa conoscere la bella dimostrazione data dal Cantor per l'esistenza, scoperta da Liouville di numeri irrazionali che non sono radici di alcuna equazione algebrica a coefficienti razionali: a tale categoria appartengono e e π, come l'A. rileva, rinviando per la dimostrazione ad un noto opuscolo di F. Klein. L' inversa della funzione esponenziale è la funzione logaritmica: con lo studio di essa il Prof. Simon ritiene esaurito il suo compito. E certo non a torto! giacchè da questo arido elenco degli argomenti trattati da lui emerge come egli abbia almeno toccati tutti i punti più delicati e importanti dell' aritmetica e dell' algebra elementare. Onde auguriamo che l' opuscoletto annunciato ottenga larga diffusione fra laureandi e laureati: e se qualcuno incoraggiato dal plauso con cui venne salutata la versione fatta dal Prof. Giudice del surricordato opuscolo di Klein, vorrà tradurlo in italiano, può contare sin da ora su l'approvazione e la riconoscenza dei suoi connazionali.

G. L.

L. Morand. — *Généalogie de la famille de Gaspard Monge.* Dijon-Paris, E. Nourry. 1904.

Questo grazioso volumetto, ornato dei ritratti di Gaspare e Luigi Monge, fu stampato in 50 esemplari numerati, ond' è destinato ad essere conosciuto da pochi e a divenire tra breve una rarità bibliografica. L'A., con pazienza degna di un benedettino, è riuscito a stabilire l' ascendenza del grande geometra francese sino al suo bisnonno e la discendenza sua e dei suoi fratelli sino ai nostri giorni. Sarebbe stato desiderabile che, egli come epilogo del suo lavoro, ci avesse dato, sotto la forma consueta, l' albero genealogico della famiglia Monge; il lavoro stesso non sarebbe aumentato di valore, ma di chiarezza, dote questa che non è mai da disprezzarsi. G. L.

Digitized by Google

ROBERTO BONOLA. — *La geometria non-euclidea.* — Esposizione storico-critica del suo sviluppo. con 63 figure. Bologna, Nicola Zanichelli, 1906, 8°, p. VI+215 [Prezzo L. 5].

Giovanni Bolyai, scrivendo, sulla fine del 1823, al padre, esclamava enfaticamente: *Ho dal nulla creato un nuovo universo!* Per noi oggi la « Scienza assoluta » del giovane ufficiale austriaco non è più il fantastico edificio magicamente sorto dal nulla, ma ci appare piuttosto come l'opera geniale, che, maturata da una lunga serie di sforzi molteplici, racchiudeva in sè il germe vitale di un ulteriore e complesso sviluppo di idee. Ma appunto se noi raccogliamo in uno sguardo l'ampia corrente di pensiero, di cui la « Scienza assoluta » storicamente sta al centro, si rinnova in noi invincibilmente l'enfatica ammirazione del secondo Bolyai. La Storia delle Matematiche nulla offre di più mirabile e, quasi direi, di più suggestivo dello sviluppo delle Geometrie non-euclidee, che, nate dai primi commenti del testo di Euclide, si svolsero dapprima faticosamente per l'opera di quelli stessi che mirarono a negar loro ogni ragion d'essere, fino a quando, ricevuto quasi ad un tratto l'assetto definitivo dalla inconsapevole collaborazione di tre menti sovrane, non solo contribuirono ai progressi di tanti rami delle Matematiche superiori, ma, più oltre ancora, agirono in modo diretto sullo svolgimento delle più astratte concezioni filosofiche.

Di questo meraviglioso sviluppo di idee il Bonola dà, nella presente monografia, una completa esposizione storico-critica. Nel I capitolo su « *I dimostratori del V postulato euclideo* » l'A. riproduce e discute i più caratteristici ragionamenti, con cui i commentatori greci ed arabi degli « Elementi » e i Geometri della Rinascenza tentarono di stabilire su basi più solide la teoria delle parallele, sia modificando la definizione, la cui forma grammaticale negativa a quegli spiriti raffinatamente logici appariva difettosa, sia *dimostrando* il V postulato di Euclide. Son qui sagacemente rintracciate in commenti arabi e greci considerazioni che, sino ad ora, s'erano attribuite senz'altro ai fondatori stessi della Geometria non-euclidea o ai loro più immediati precursori; e vengono messi in luce alcuni contributi particolari notevoli, che prima d'oggi parevano essere sfuggiti all'attenzione degli storici, come, per esempio, le acute osservazioni di Giordano Vitale da Bitonto.

Chiuso quel primo periodo con J. Wallis, l'A. svolge e coordina nel II capitolo su « *I precursori della Geometria non-euclidea* » le considerazioni di quei Geometri, che segnarono il passaggio dalla fede indiscussa nella validità del postulato euclideo al dubbio critico e, quindi, alla prova della sua indimostrabilità. Apre questa serie dei precursori il P. G. Saccheri. del cui *Euclides ab omni naevo vindicatus* è qui riprodotto. nelle sue linee principali, il contenuto geometrico,

Digitized by Google

fino al punto in cui la singolare perspicacia di quel geometra soggiacque all'inganno del preconcetto euclideo. L'esposizione acquista interesse dai numerosi raffronti fra le considerazioni del Saccheri e le deduzioni di Nasìr-Eddìn e di Giordano Vitale; e l'A. vi aggiunge del proprio la dimostrazione elementare della osservazione di M. Dehn relativa alla indipendenza dei teoremi del Saccheri sul quadrilatero birettangolo isoscele dal postulato di Archimede e dal principio della continuità. Segue, nella serie dei precursori, Giovanni Enrico Lambert, rispetto al quale l'A. accoglie e rafforza le congetture del Segre circa l'influenza dell'opera del Saccheri sullo svolgimento delle concezioni di lui; e fra queste mette particolarmente in luce le conclusioni relative all'esistenza di una misura assoluta nell'ipotesi Saccheriana dell'angolo acuto e la presunzione, per quel tempo veramente ardita, che siffatta ipotesi sia valida su di una sfera di raggio immaginario! L'A. prosegue, quindi, rintracciando e determinando i progressi, le soste, le oscillazioni della concezione non-euclidea presso i Geometri francesi della fine del secolo XVIII, in A. M. Legendre, nel Bolyai padre, in F. L. Wachter; e giunge così al glorioso periodo dei « *Fondatori della geometria non-euclidea* » (Cap. III IV), fra i quali, accanto ai grandi nomi del Gauss, del Lobacefski e di Giovanni Bolyai, accoglie quelli dello Schweikart e del Taurinus.

Il Gauss, che fu certamente il primo ad aver chiara la visione di una Geometria indipendente dal V postulato, lasciò, come è notorio, scarsissimi documenti delle sue « meditazioni » in proposito: il Bonola li coordina, e ricostruisce su di essi, per quanto è possibile, le idee di quel grande, alle quali ravvicina le poche notizie rimasteci della Geometria astrale dello Schweikart e le formole fondamentali della Geometria logaritmico-sferica del Taurinus (Cap. II). Restano il Lobacefski e Giovanni Bolyai, per ciascuno dei quali l'A. (Cap. IV) indaga la prima origine e lo sviluppo dell'idea geniale, e determina e caratterizza con limpida sintesi le particolari vedute e i singoli contributi.

Così, accanto alle concezioni del Lobacefski, che aveva preso le mosse dalla negazione del V postulato di Euclide, vien chiaramente messa in luce la più larga veduta del Bolyai, che mirò a costruire una *Scienza assoluta*, cioè indipendente da qualsiasi particolare ipotesi in ordine al parallelismo. E a quest'ultimo ordine di idee l'A. stesso reca un suo contributo, completando la determinazione delle formole fondamentali della Trigonometria assoluta, che in parte erano state stabilite dal Bolyai e dal de Tilly.

A caratterizzare l'altro sistema non-euclideo, che sorge ove si tolga dalle premesse l'ipotesi della infinità della retta, l'A. nell'ultimo capitolo dà sinteticamente notizia delle indagini e delle conclusioni di Riemann e Beltrami sulla struttura degli spazi e di Helmholtz e Lie

Digitized by Google

sui caratteri gruppali dell'insieme dei movimenti, e stabilisce la estensione proiettiva, secondo il Cayley, del concetto di proprietà metriche, concludendo la esposizione con alcune perspicue considerazioni riassuntive sulla indimostrabilità del postulato euclideo delle parallele.

Alla fine del IV capitolo sono enunciate alcune proposizioni, che in certo senso si possono riguardare come ipotesi equivalenti a codesto postulato: ora a siffatte ipotesi si può aggiungere un principio di natura statica relativo all'equilibrio delle leve, che risale ad Archimede. Delle relazioni che così nascono fra Statica e Geometria l'A. discute in una Nota I su « I principî fondamentali della Statica e il postulato di Euclide »; mentre in una II Nota egli con singolare eleganza stabilisce elementarmente le proprietà delle parallele e delle superficie di Clifford (nello spazio ellitico), e dà un rapido cenno del problema di Clifford-Klein, « che storicamente si riattacca al parallelismo di Clifford, e che mira a caratterizzare la struttura geometrica dello spazio in base al più ristretto sistema di postulati compatibili coi dati sperimentali e col principio d'omogeneità dello spazio ».

Son questi, sommariamente e fugacemente accennati, il contenuto e l'ordine della monografia del Bonola. Il quale ha affrontato questo vasto e complesso argomento con una preparazione che non potrebbe essere nè più larga nè più profonda, nè più coscienziosamente maturata. Un senso critico equilibrato e sicuro, un fine gusto geometrico, una assidua tendenza al concepire largo ed elevato si fondono armonicamente in questo lavoro. E poichè l'A., grazie anche ai suoi personali contributi, ha conservato a tutta la sua esposizione un carattere elementare e sintetico, l'opera sua non soltanto terrà un posto singolarmente onorevole nella letteratura matematica della Geometria non-euclidea, ma troverà altresì liete accoglienze fra la più larga cerchia di coloro, che, da qualsiasi campo, si interessano alla Storia delle idee.

UGO AMALDI.

CH. LUCAS DE PESLOÜAN. — *N. H. Abel - Sa vie et son oeuvre.* Paris, Gauthier-Villars, 1906, 8°, p. XIII+168. [Prezzo del volume leg. fr. 5].

Chi voglia apprendere le ricerche della vita e farsi un'idea chiara ed esatta dell'opera scientifica compiuta dal grande geometra, onore e vanto della Norvegia, non ha che ricorrere, oltre alla collezione delle sue *Oeuvres complètes*, ad una nota biografia del Bjerkness, al *Memoriale* pubblicato in occasione del primo centenario della sua nascita e finalmente (per quanto concerne le sue relazioni con Jacobi)

Digitized by Google

ad un eccellente opuscolo del Königsberger. Il volume che annunziamo, non contenendo « aucun document nouveau » (p. XIII), non aumenta la somma delle nostre cognizioni sull'argomento (1), ma varrà certamente a rendere più numerosa la schiera di coloro che conoscono ed ammirano una delle più grandi personalità matematiche che annoveri la storia. Va data lode all'autore pei larghi estratti dei lavori originali allegati alla sua esposizione e pei tentativi da lui fatti onde scoprire la figliazione delle idee che germogliarono dal cervello del suo eroe.

L'elegante volume annunciato, ornato della riproduzione di un noto ritratto di Abel, meriterebbe di iniziare una collezione di biografie di matematici; auguriamo che esso effettivamente ne sia il primo elemento, chè pensiamo che, se la *storia* è da tempo conosciuta come maestra della vita, alla *biografia* è riserbata una funzione educatrice di cui giova accrescere la forza e la sfera d'influenza. G. L.

The Teaching of Elementary Mathematics. Report of the Committee appointed by the Mathematical Association. London, G. Bell & Sons, 1905, 8°, p. 16 [Prezzo 6 Pences].

Il riordinamento delle nostre scuole medie essendo questione perennemente all'ordine del giorno, ci sembra opportuno richiamare l'attenzione dei nostri lettori sopra questo opuscolo, ove è condensato il lavoro, durato parecchi anni, di un buon numero di educatori di alta competenza. Emerge da esso che sono continui gli sforzi che vengono fatti in Inghilterra per emanciparsi dalla cieca osservanza dei precetti euclidei e per introdurre il sistema decimale al posto del complicato sistema di pesi, misure e monete colà in uso. Risulta dallo stesso essere ritenuto della massima utilità un corso di propedeutica geometrica, che ha qualche lineamento comune con la nostra geometria intuitiva, ma che è molto più pratico. Parallelamente ad esso viene suggerito un analogo corso di meccanica pratica. Tale suggerimento ci spinge a notare che da noi la scienza dei moti e delle forze non si suole considerare come un ramo delle matematiche (parliamo, ben inteso, dell'insegnamento elementare!); si leggono, quindi, nei nostri periodici osservazioni e discussioni sull'insegnamento dell'algebra e della geometria, ma mai una parola sulla meccanica; non sarebbe forse il momento di cambiare sistema? non sarebbe opportuno che quella scienza cessasse dall'essere un semplice capitolo introduttorio al corso di fisica, per avere (almeno negli Istituti tecnici) una vita autonoma?

G. L.

(1) Sembra anzi che l'A. ignori avere il Mittag-Leffler rinvenuta e pubblicata (*Acta mathem.* T. XXVI, 1902) la II Parte delle *Recherches sur les fonctions elliptiques*

Digitized by Google

H. BRUNS. — *Wahrscheinlichkeitsrechnung und Kollektivmasslehre.* Leipzig u. Berlin, Teubner, pag. VIII, 338.

Il prof A. Bruns appartiene alla categoria, tanto più pregevole quanto meno numerosa, di quei cultori delle matematiche che tengono con onore la via di mezzo fra la teorica e l'applicazione. Egli sa approfondire con acume filosofico i problemi fondamentali, adoperare tutti i migliori strumenti analitici per la risoluzione di tali problemi e spingere fino ai suoi ultimi particolari la tecnica delle operazioni numeriche,

Niuna prova migliore delle eminenti qualità del prof. Bruns potrebbe aversi, che il libro del quale diamo qui breve annunzio agli studiosi, persuasi di far loro cosa grata ed utile additando un' opera destinata a stabilire principii rigorosi, metodi nuovi e norme pratiche ben chiare in argomenti per loro natura difficili e delicati.

Le tre prime lezioni sono destinate ai principii fondamentali e ai principali teoremi del calcolo delle probabilità; qui appare somma la cura dell'A. di stabilire bene, in ogni caso, quelle condizioni nelle quali i principii e i teoremi hanno legittima applicazione: sopratutto interessante è la discussione relativa alla difficoltà pratica dell' applicazione del teorema di Bayes sulla probabilità delle cause a posteriori. Si potrà forse obbiettare che tutte queste riserve filosofiche non sono nuove per chi abbia approfondito a dovere il calcolo delle probabilità, e d'altra parte riescono, per la loro difficoltà, pressochè inaccessibili ai principianti; ma poichè fra gli uni e gli altri vi ha il grandissimo numero di coloro che hanno studiato le cose a mezzo, così riteniamo tutt' altro che inutili le accennate discussioni filosofiche dell'A.

Le lezioni 4.ª e 5.ª contengono trattazioni analitiche intorno alle trascendenti

$$\Pi(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^x dt \ , \quad \Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-x^2} dx \ ,$$

e alla $sg(x)$, col quale simbolo l'A. indica una funzione che si annulla con x, ed è uguale a ± 1 secondo che $x \gtrless 0$.

Il *problème des partis*, quello della *posta nel giuoco*, e la *probabilità geometrica* formano oggetto delle lezioni 6.ª, 7.ª ed 8.ª, sulle quali non ci arrestiamo per venire alla parte più originale del libro.

La 9.ª lezione (applicazioni e impostazione di problemi), dopo una breve trattazione delle probabilità relative alle testimonianze e ai verdetti, contiene considerazioni generali sulla statistica matematica e la introduzione allo studio delle collettività.

Digitized by Google

I concetti fondamentali di questo studio sono esposti nella lezione 10.ª. Una collettività *(Kollektivgegenstand)* è una moltitudine di cose sulla stessa specie che possono essere ordinate statisticamente secondo un *indice (Merkmal)* ossia una grandezza il cui valore numerico viene assunto come *argomento*. (Es.', la statura d' una massa di coscritti, i valori del rapporto fra le nascite maschili e le femminili in un gran numero d' anni consecutivi). Sono qui date le norme per dedurre dai dati statistici primitivi la *tavola primaria di ripartizione*, la *tavola delle somme assolute e relative*, in base alle quali si stabilisce la *funzione* (o *curva*) *delle somme*, e la *funzione* (o *curva*) di *ripartizione* o di *frequenza*. Segue il calcolo del valor medio di una funzione T (x) dell' argomento, nella supposta collettività, in base alla curva di frequenza che si è determinato.

Nella 11.ª lezione la *funzione delle somme* viene espressa (mediante una formola che può dirsi fondamentale pel resto dell' opera) con una serie, i cui termini sono i prodotti delle successive derivate della funzione Φ (x) per dei coefficienti D, i cui valori si costruiscono facilmente mediante le medie aritmetiche delle potenze intere dei valori osservati dell' argomento. È introdotto qui l' elemento: *dispersione (Streuung)* al quale corrisponde il cosidetto *error medio* nel caso particolare di quelle collettività cui si dà il nome di errori accidentali di un sistema di osservazioni.

La 12.ª lezione è dedicata alle formole relative alla *trasformazione dell' argomento*, o come si direbbe in linguaggio puramente analitico, al cangiamento della variabile indipendente.

La 13.ª lezione riguarda l'importante problema della *miscela degli argomenti*, il quale può enunciarsi così; si fanno tante successive prove indipendenti, in ciascuna delle quali ognuna di r quantità variabili x^1, x^2, .., x^r (che per ipotesi sono l' una dall' altra fisicamente indipendenti) assume un certo valore numerico. Si domanda la legge di frequenza per una funzione $x = T(x^1, x^2, \ldots x^r)$, supposte note le leggi di frequenza per le singole x^1, $x^2 \ldots x^r$. La ricerca è in realtà limitata al caso di una f.ª lineare, o più semplicemente (poichè a questa la f.ª lineare si può sempre facilmente ridurre) al caso $x = x^1 + + x^2 + \ldots + x^r$. Alla x l'A. dà il nome di *argomento misto*. Una conseguenza importante dei calcoli qui trattati è questa che la miscela degli argomenti fa tendere la curva di frequenza, (tanto più marcatamente quanto più grande è il numero r) verso la curva *esponenziale* ordinaria. Questo fatto analitico rende ragione del perchè nello studio delle grandi collettività, nelle quali l' argomento risulta di necessità complicato da più argomenti indipendenti non facili a sceverarsi a priori, così di frequente si osservi in pratica assai ben verificata la legge esponenziale.

Digitized by Google

Nella 14.ª lezione è trattata la *miscela di differenti modi di ripartizione*. In una collettività $K(x, y)$ vengono presi in considerazione due argomenti x, y. *Tenuto fisso il* y, si ha una collettività $K(x)_y$. Invece ordinando le collettività, sempre secondo i valori di x, *ma senza tener conto dei valori di* y, si ha una collettività mista $K(x)$. Si cercano le relazioni fra la legge di frequenza relativa alla $K(x)$ e le leggi di frequenza relative alle varie $K(x)_y$, corrispondenti ai valori considerati della y. I calcoli relativi a questo problema, e ad altri che ad esso si connettono, conducono l'A. a trattare di due importanti cose: 1.° del come la miscela dei modi di ripartizione tenda ad *allontanare* dalla legge esponenziale (1). — 2.° dei criterii per giudicare della effettiva *indipendenza fisica* di due argomenti x, y. Giacchè fra le varie funzioni e i varii elementi numerici, cui lo studio della collettività $K(x, y)$ conduce, esistono certe relazioni le quali debbono essere verificate solo quando gli argomenti x, y, siano in realtà indipendenti.

La 15.ª lezione tratta della incertezza degli elementi numerici calcolati per una collettività, incertezza derivante dal fatto che, il numero dei dati essendo limitato, ogni fenomeno non si presenta in media un numero di volte proporzionale alla propria probabilità, non essendovi quella completa compensazione delle accidentalità che avverrebbe se il numero delle prove fosse infinito. La 16.ª tratta invece dell'analogo difetto negli elementi numerici dovuto alla influenza dell'*arrotondamento* dei valori numerici dell'argomento, e fornisce norme per scemare per quant'è possibile questa influenza.

Nella 17.ª lezione le norme generali relative alle collettività qualsiasi vengono applicate ai casi teorici e, relativamente semplici, dei così detti problemi di Bernoulli e di Poisson, relativi ai risultati di un gran numero di prove indipendenti ripetute con probabilità costante o variabile per un dato avvenimento, da una prova all'altra. Applicando a questi casi il metodo generale dato nella 2.ª lezione, la trattazione conduce a porre in evidenza i termini trascurati nelle solite formole semplici di Bernoulli e di Poisson e fornisce criteri per riconoscere se una data serie di avvenimenti possa o no logicamente parificarsi (come il più delle volte si fa a priori senza troppa riflessione) al caso schematico della successiva estrazione di una palla da una o più urne. Il caso particolare in cui la probabilità semplice dell'avvenimento in ogni prova è assai piccolo, e il problema della probabilità di determinate successioni *(Gruppen)* d'avvenimenti in un numero fisso di prove consecutive, formano l'argomento della 18.ª le-

(1) Di questo fatto, pel caso particolare, degli errori di osservazione si occupò il Newcomb nell'VIII vol (1886) dell'« American Journal of Math. ».

Digitized by Google

zione. La 19.ª è dedicata alle applicazioni del metodo generale al caso della ricerca a posteriori della probabilità (problema di Bayes) in base ai risultati di un gran numero di prove ripetute; si ha qui, in particolare, un interessante paragone fra la natura degli errori inerenti a una tale ricerca e quella dei così detti *errori di osservazione.*

Nelle ultime cinque lezioni (20.ª a 24.ª), che certo costituiscono una delle parti più importanti del libro, sono date le regole per la effettiva esecuzione dei calcoli numerici. In un genere di operazioni che come questa, si presenta, a prima vista come assai complicata, una chiara e dettagliata esposizione del tecnicismo pratico era indispensabile, e qui in realtà conduce a regola relativamente semplice e alla necessaria perspicuità dei risultati.

Seguono le tabelle numeriche pei valori della $\Phi(x)$ e delle sue prime *sei* derivate.

È superfluo dire che l'A., oltre alla esposizione delle idee e dei metodi propri ha dato la dovuta estensione ai concetti degli Autori che lo hanno preceduto, in particolare le idee del Lexis e del Fechner sono largamente svolte e citate, con che l'A. ha certamente fatto cosa utile a noi: ma non meno lode gli va data dal non aver voluto rimpinzare il libro e intorbidare la esposizione dei concetti e dei metodi con un eccessivo lusso di citazioni: lusso, che può dirsi un difetto di molte opere moderne, nelle quali lo scrittore sembra piuttosto aver di mira lo sfoggio della erudizione propria che il vantaggio degli studiosi.

P. Pizzetti.

G. Holzmüller. *Planimetrie für das Gymnasium im Anschluss an den preussischen Lehrplan von 1901 methodisch bearbeitet.* I. Theil. Mit 119 Figuren im Text; zweite Auflage. Leipzig und Berlin; Teubner, 1905; p. VII + 240.

Un libro didattico, ove è svolto il programma adottato in paese straniero, può apparire a prima giunta incapace di destare il nostro interesse. Che ciò non possa nè debba dirsi riguardo al volume del Prof. Holzmüller che oggi annunziamo è a parer nostro sufficientemente dimostrato (anche senza considerare l'alta competenza didattica dell'autore) da alcune caratteristiche di esso, delle quali sembraci opportuno tener parola. Dopo di avere accennato ai problemi, egli osserva che « l'insegnamento deve essere reso il più interessante ed incatenante possibile e fatto in modo da mettere in evidenza le relazioni dell'argomento svolto con altri. Ben inteso, però, la varietà dei problemi non deve far dimenticare la connessione logica delle parti ». Nota poi l'A. che « l'epoca moderna ha prodotte numerose ricerche

Digitized by Google

sopra i fondamenti della geometria; in Italia si è cercato d'introdurne i risultati nei trattati elementari; io non ho seguito tale esempio; tuttavia in certi punti ho reso il dettato conforme a questi punti di vista moderni ». Ed aggiunge: « Pel ginnasio umanistico, il quale è destinato ad avere sempre l'insegnamento del greco, ho ritenuto opportuno di introdurre in nota alcune notizie biografiche dei più celebri matematici dell'Antichità e di aggiungere alcune citazioni nell'originale per togliere a tali notizie il carattere di aneddoti e per citare le vere fonti. Di tali passi venne pure data la traduzione. Anche nel corso dell'insegnamento matematico deve essere stimolato lo sviluppo del senso storico e devono esserne indicati i rapporti col greco, non fosse altro ad illustrazione della nomenclatura. Anzi una speciale consacrazione del valore e della necessità della matematica nell'insegnamento si potrà ottenere per gli studenti più versati nelle lingue citando i relativi passi dei filosofi greci. In un' apposita Appendice si trovano spiegati etimologicamente i termini tecnici di origine greca. (Che ciò non sia superfluo è dimostrato dalla pronuncia inesatta di parole come *diagonale, goniometria, goniometro,* le quali si fanno erroneamente provenire da τό γόνυ = ginocchio, invece che da ἡ γωνια = angolo, epperò vengono anche interpretate in modo sbagliato) ».

G. L.

T. Muir. *The Theory of Determinants in the historical order of development.* Part I. General Determinants up to 1841. Part II. Special Determinants up to 1841. Second edition. London, Macmillan, 1906, 8°, p. XI - 491 [Prezzo del vol. leg. sh. 17].

Delle due parti costituenti l'opera presente la sola prima ha già vista la luce (nel 1890) (1) ed ora ci si presenta con qualche notevole aggiunta. La II è totalmente consacrata a quei determinanti di forma speciale che furono considerati nei primi quarant'anni del secolo decorso, cioè i determinanti simmetrici, gli alternanti, i jacobiani, i determinanti gobbi, i determinanti ortogonali (o « ortogonanti » secondo il nome ragionevolmente suggerito dall'autore), nonchè altri di minore importanza, non designati con nomi *ad hoc*, che s'incontrano in lavori di Wronski, Scherk, Schweins, Jacobi e Sylvester. Per ciascuno dei temi trattati l'A. indica tutti i contributi degli scrittori che se ne occuparono (2), riferendo anzi per la massima parte i passi originali;

(1) Cfr. il resoconto da noi fattone nella *Bibliotheca mathematica*, 1890, p. 59-61.

(2) Ci duole l'autore abbia dimenticato l'articolo del Chelini *Formazione e dimostrazione della formola che dà i valori delle incognite nelle equazioni di primo grado* (Giornale Arcadico, t. LXXXV, 1840), che contiene una dimostrazione di formole di Cramer.

Digitized by Google

qualche breve osservazione sparsa quà e là è destinata a segnalare i legami che esistono fra tali passi. Inoltre ognuno dei teoremi fondamentali della teoria dei determinanti porta un numero romano, al quale viene apposto un numero arabico destinato ad additare i vari scopritori di esso o le varie persone che vi arrecarono modificazioni od aggiunte. Finalmente con tavole sinottiche viene presentato uno schema dello svolgimento della teoria. Noi ci troviamo, quindi, in presenza non di un'opera storica nel senso stretto della parola, ma di una ricca collezione di materiali, accompagnata dai piani dell'edificio che con essi si dovrà comporre; ben poco, adunque, rimane da fare a colui che volesse trarre dal lavoro del Muir una storia dell'indicata teoria negli anni 1693-1841. Resterebbe poi da completar l'opera, spingendo tale storia sino alla fine del Secolo XIX; auguriamo che in un venturo volume il dotto autore dell'opera annunziata ne voglia apprestare i più rilevanti ingredienti.

G. L.

W. F. Osgood. — *Lehrbuch der Funktionentheorie.* Erster Band, erste Hälfte. Leipzig, Teubner, 1903, 8°, 305 p. [Prezzo Mk. 7].

Questa eccellente opera, che ci auguriamo vedere presto completa, riunisce in sè i pregi dei trattati tedeschi e di quelli inglesi; mentre il rigore vi è strettamente rispettato, l'autore lascia di quando in quando la rigidezza dell'esposizione per assumere un'intonazione discorsiva, quasi confidenziale, per iscolpire nella mente di chi legge, con una di quelle frasi felicemente espressive, di cui gl'Inglesi hanno il segreto, un concetto importante od un teorema fondamentale, ed interrompe sovente il filo della teoria svolgendo, o semplicemente proponendo, interessantissimi esercizi. Con ciò il libro risponde completamente al suo nome di *Lehrbuch*, giacchè non si limita ad *esporre* la teoria, ma la *insegna* quasi a viva voce.

Partendo dai concetti fondamentali di funzione, limite, continuità, derivata, per le funzioni di una (C. I) e di più variabili (C. II), l'autore tratta la teoria delle funzioni implicite, dei sistemi di funzioni e della rappresentazione conforme. Osserva poi (C. III) che solo sotto determinate condizioni ha luogo la relazione:

$$\lim_{y=b}\left[\lim_{x=a} f(x,y)\right] = \lim_{x=a}\left[\lim_{y=b} f(x,y)\right];$$

e fa vedere come parecchie questioni importanti dell'analisi si riducano in sostanza a questa osservazione: tali la continuità d'una somma di infinite funzioni continue, l'integrazione e la derivazione per serie, la continuità d'un integrale definito, la derivazione sotto il segno.

Digitized by Google

Considera quindi (C. IV) gli integrali estesi a curve, che pone sotto la forma

$$\int_{(a,b)}^{(x,y)} P\,dx + Q\,dy,$$

e determina le condizioni perchè essi non dipendano che dai soli estremi, il che lo conduce al concetto di connessione semplice e multipla. Per proseguire più oltre lo studio delle funzioni, occorre precisare aritmeticamente certi concetti geometrici; a ciò è dedicato un lungo capitolo (C. V). Nella seconda parte (C. VI, VII) viene sviluppata la teoria delle funzioni d'una variabile complessa (C. VI) e dei loro integrali (C. VII), secondo i concetti di Cauchy e Riemann.

G. Vivanti.

A. Del Re. — *Lezioni sulle forme fondamentali dello spazio rigato, sulla dottrina degli immaginari e sui metodi di rappresentazione nella geometria descrittiva*, Napoli, Alvano, 1906, 8.°, p. 6+85 [Prezzo L. 3,50].

I sei §§ (1). di cui consta il presente volumetto — il quale rappresenta la parte introduttoria del corso di Geometria descrittiva, che da qualche anno l'A. va svolgendo nell' Università di Napoli, — si ripartiscono naturalmente in quattro gruppi. Nel primo (che comprende i primi due §§), sono stabilite le proprietà fondamentali dei complessi e dalle congruenze lineari, applicato i concetti ed i metodi propri della geometria pura. Nel seguente è data ampia notizia della procedura con cui Staudt ha rappresentati gli elementi immaginari dello spazio col mezzo di figure reali. In seguito l'A. è costretto di abbandonare il campo della pura geometria per introdurre il concetto di « condizione algebrica » imponibile ad una figura. Viene quindi introdotta la nozione di varietà e ne sono addotti gli esempi seguenti: Varietà a tre dimensioni costituite dalle coppie di punti di un piano allineate con un punto fisso o delle coppie di rette di un piano segantisi sopra una retta fissa; varietà a quattro dimensioni costituita dalle coppie di rette o di punti di un piano. Ora, introdotto nell' ultimo § il concetto di rappresentazione di una varietà su di un' altra, si vede che

(1) 1. Forme fondamentali nei varii spazi e loro principali proprietà. — 2. Ulteriori proprietà delle forme fondamentali introdotte nel paragrafo precedente. — 3. Completamento delle forme fondamentali con l'aggiunta degli elementi immaginari. — 4. Le condizioni cui possono essere sottoposti gli elementi nelle varie forme fondamentali. — 5. Varietà geometriche e dimensioni di una varietà. — 6. Rappresentazione di una varietà sopra un' altra. — 7. L'obbietto della Geometria descrittiva. — 8. Metodi diversi di rappresentazione.

Digitized by Google

sulle due prime varietà si possono rappresentare i punti ed i piani dello spazio, mentre sulle altre si può rappresentare la totalità delle rette dello spazio stesso; e così si è condotti a quelle rappresentazioni degli elementi fondamentali dello spazio su cui riposano il metodo del Monge, quello della projezione centrale ed anche quello della projezione stereoscopica, metodi destinati a venire svolti nel corso al quale il presente opuscolo funge da esordio. G. L.

F. S. MACAULAY. — *Geometrical Conics*, 2.ª Edition, 8°, p. X + 300. Cambridge, University Press, 1906.

Tutti sanno che in Inghilterra nell' insegnamento elementare Euclide regna e governa, mentre l' istruzione geometrica superiore s' informa ai metodi che Apollonio ha in parte inventati e ha in bell' ordine tramandati ai posteri più remoti. Ma, come nelle aule delle scuole secondarie del Regno Unito ha echeggiato il grido « abbasso Euclide ! », non sempre uscente da gole giovanili, così anche il regno fondato dal grande geometra di Perga si desidererebbe da molti sostituito con altro governato da leggi più conformi allo spirito moderno. Di ciò fornisce indiscutibile e splendido esempio il volume del Prof. Macaulay che oggi annunziamo, il quale sembra caratterizzare un' epoca di transizione e, guardato da un certo punto di vista, produce un' impressione analoga a quella che farebbe il Partenone al quale fosse accollato un edificio stile *liberty !* Ciò sia detto senz' intenzione di irrispettosa critica, chè, anzi, è dovere di tutti tributare larga ed incondizionata lode al dotto autore pei suoi sforzi fatti onde diffondere fra i suoi giovani connazionali quei metodi nel cui maneggio egli si è da tempo affermato maestro provetto; non potendo egli cancellare d' un colpo le abitudini tradizionali nella sua terra, accortamente fece passare merce tedesca, francese ed italiana sotto bandiera greca.

Il volume in questione è architettato su di un piano che risulta dall' Indice che ne riferiamo:

Definizione ed Introduzione: Limiti. la retta all' infinito. — Cap. I. Forma della curva. — II. La parabola. — III. Diametri dell' ellisse, — IV. Diametri ed ansitoti dell' iperbola. — V. Le coniche in generale — VI. Poli e polari; principio di dualità. — VII. L'iperbola equilatera. — VIII. Cerchio di curvatura. — IX. Il II cono circolare retto; projezione ortogonale. — X. Fasci e punteggiate in involuzione. — XI. Teoremi vari; figure simili; angoli eccentrici; coniche confocali; rettificazione. — XII. Rapporti anarmonici; òmografia; generazione projettiva delle coniche.

L'A. dichiara che nel redigere la parte moderna della sua opera si è giovato delle note « Lezioni » del prof. Enriques. Seguendo le

Digitized by Google

tradizionali abitudini inglesi egli poi ha corredato la sua esposizione di una splendida collezione (di circa 700) esercizi proposti, pei più difficili dei quali egli ha dato qualche traccia di soluzione; in essi si possono dire riprodotte tutte le proprietà che vennero ravvisate nelle curve di second' ordine; onde da soli basterebbero a far porre il presente volume fra quelli che ogni insegnante di geometria projettiva deve quotidianamente consultare.

G. L.

G. MAHLER. — *Ebene Geometrie.* Mit 111 zweifarbigen Figuren (Sammlung Göschen N. 41). 4. Auflage, Leipzig, Göschen, 1905, pag. 166 [Prezzo Mk. 0.80].

Le teorie classiche della geometria piana sono ordinate in questo volumetto seconda un concetto moderno; infatti, una prima sezione è intitolata: « Simmetria e congruenza », mentre la seconda tratta di « Similitudine »; l' ultima poi è dedicata ai problemi. L'A. non si è perduto in lunghe considerazioni su postulati e definizioni (basti dire che della retta non trovammo nemmeno la definizione !) e così ha usato nel miglior modo possibile il breve spazio di cui disponeva. Lodevole la ricca collezione di esempi ed esercizi; quanto alle figure bicrome, la necessità di esse ci sembra discutibile, vista la semplicità di quelle che s' incontrano negli elementi della geometria. ma rendono più vago il fortunato volumetto dell' egregio professore del Liceo di Ulm.

G. L.

K. DOEHLEMANN. — *Projective Geometrie in synthetischer Behandlung.* Mit 91 Figuren (Sammlung Göschen N. 91). 3. Auflage, Leipzig, Göschen, 1905; p. 180 [Prezzo Mk. 0.80].

Il metodo di esposizione delle teorie fondamentali della geometria projettiva adottato in questo pregevole volume è ispirato, non alle idee rigorosamente sintetiche di Staudt e Reye, ma piuttosto a quelle di Steiner, Chasles e Cremona; di rapporti anarmonici è quindi fatto, non solo cenno, ma anche largo uso. Di avere adottato tal sistema la generalità dei docenti loderà il Prof. Doehlemann, perchè tutti sanno che in un primo studio l' altro metodo riesce difficile. Lo scopo modesto che si è prefisso l'A. ci dispensa da una particolareggiata analisi di quest' operetta; basti dire che in essa sono svolti tutti i temi di pertinenza della geometria projettiva sintetica, sino alle schiere rigate inclusivamente.

G. L.

Digitized by Google

J. VONDERLIN. — *Parallelperspektive, rechtwinklige Axonometrie.* Mit 121 Figuren (Sammlung Göschen N. 260). Leipzig, Goschen, 1906 [Prezzo Mk. 0,80].

Questo manualetto si divide in quattro parti, cioè: I. Assonometria ortogonale. II. Assonometria obliqua. III. Costruzioni dirette relative all'assonometria. IV. Ombre in assonometria. — L'A. ha occupato bene lo spazio concessogli, sicchè ha potuto dare tutta la teoria dell'assonometria ortogonale od obliqua (il teorema di Pohlke escluso) ed indicare, coll'aiuto di belle figure, molte applicazioni di essa. Siccome il disegno assonometrico presta preziosi servigi ai pratici, così a ragione l'autore ha dato alla sua esposizione un carattere elementare, pur conservandole le doti che si esigono in qualunque esposizione scientifica. Quindi l'annunziata pubblicazione non va confusa con altre (come sarebbe quella di John Watson, *Oblique and isometric projection*, London 1905) che si dirigono esclusivamente agli artisti ed ai pratici in genere.

G. L.

J. HORN. — *Gewöhnliche Differentialgleichungen beliebiger Ordnung.* Leipzig, Goschen, 1905, 8°, p. X+3 1.

Questo volume è un necessario complemento, se non una vera continuazione, di quello di Schlesinger di cui abbiamo parlato nel *Bollettino* 1901, p. 112. Esso può considerarsi composto di quattro parti: la prima (C. I), in cui è stabilita l'esistenza delle soluzioni d'un sistema di equazioni differenziali ordinarie; la seconda (C. II-IX), dedicata allo studio delle equazioni lineari e dei sistemi d'equazioni di tal natura; la terza (C. X), contenente l'esposizione dei metodi elementari d'integrazione; finalmente la quarta (C. XI-XIV), dove sono trattati argomenti vari: equazioni differenziali a variabili reali e loro soluzioni periodiche, integrali singolari, equazioni del secondo ordine ad integrale uniforme.

Le varie teorie sono svolte con chiarezza e con rigore, e ciascuna è accompagnata da esempi molto opportunamente scelti.

G. VIVANTI.

M. FRÉCHET. — *Sur quelques points de calcul fonctionnel.* Thèse présentée à la Faculté des Sciences de Paris, 1906, 4°, p. 74.

Le ricerche sui fondamenti del Calcolo, e quelle sui postulati fondamentali della geometria, sorte o dal bisogno di un maggiore rigore, o dallo studio più ampio delle geometrie non euclidee, hanno, in questi

Digitized by Google

ultimi decenni, portato a due nuovi indirizzi di studii, che vanno sempre più attirando l'attenzione di matematici di ogni paese.

Il primo di essi è di ridurre al minimo i postulati, o, come si può dire, le definizioni degli enti fondamentali nelle varie branche della Matematica: geometria metrica, geometria proiettiva, analysis situs, aritmetica, ecc.

Il secondo indirizzo, strettamente connesso al primo, è quello di studiare le varie interpretazioni, di cui sono suscettibili i teoremi di un dato ramo delle Matematiche, quando si lasci, quanto più è possibile, indeterminato il significato delle varie parole adoperate. Questo secondo indirizzo di studii è sorto in sostanza col principio di dualità (quando si osservò che p. es., i postulati della geometria proiettiva del piano non mutavano il loro significato, quando con le parole *punto* e *retta* si fosse indicato rispettivamente una *retta* o un *punto*) e con la teoria degli iperspazii (quando si osservò che con le parole punto di uno spazio a n dimensioni si poteva intendere qualsiasi ente generico scelto tra ∞^n enti della stessa specie, per es. una curva generica di un sistema lineare di ∞^n curve, ecc.).

Questo secondo indirizzo di studii serve di complemento al primo, in quanto che permette di vedere con chiarezza quanto ognuno dei nostri postulati o convenzioni contribuisca effettivamente alla costruzione della teoria esaminata.

Il lavoro del Fréchet, di cui daremo un breve cenno, è un primo passo all'analisi del concetto di funzione. Nel senso ordinario della parola, funzione è una corrispondenza univoca tra i valori di una variabile x e quelli di una variabile y. Il Fréchet studia la corrispondenza tra gli enti A di un insieme E qualunque (numeri, frazioni, curve, ecc.) e i valori di una variabile y, quando ad ogni A corrisponde un solo valore di y. Ed esamina quali proprietà devono competere ad E, affinchè a tali corrispondenze (operazioni funzionali) si possano estendere le proprietà usuali delle funzioni.

Il lavoro del Fréchet merita di essere studiato: e le tante questioni, che ne sorgono, sono certamente degne di essere ancora approfondite, e forse anche generalizzate alle corrispondenze, univoche in un senso, tra gli enti di un insieme E qualunque, e quelli di un altro insieme E'.

Il Fréchet fa uso di definizioni nominali, che sono nello stesso tempo un postulato per E. Egli ammette così dapprima che si sappia dire quando due enti di E sono o non sono distinti (in guisa che se A non è distinto nè da B, nè da C, allora B non sia distinto da C), ed ammette inoltre che si sappia dire quando una seria infinita di enti di E ha, o non ha un limite. La parola limite può avere un significato qualunque, assoggettato alle sole condizioni:

Digitized by Google

1.°) Una serie infinita di enti uguali ad un ente A, ha A per limite. — 2.°) Se la successione A_1, A_2, A_3..... è contenuta in E, e ha un limite A, anche la successione A_{n_1}, A_{n_2}, A_{n_3}.... $(n_1<n_2<n_3....)$ ha il limite A.

Per mezzo di questa definizione si possono definire i punti limiti di E, l'insieme derivato di E, gli elementi di condensazione, gli insiemi compatti (insiemi formati di un numero finito di enti distinti, oppure tali che ogni infinità di enti dell'insieme ha almeno un elemento limite) e gli insiemi estremali (insiemi contemporaneamente chiusi e compatti).

Il Fréchet può poi definire le operazioni funzionali T continue, dicendo che, se U è continua, e se A_1, A_2..,. sono enti di E, tali che $A = \lim_{n=\infty} A_n$, allora $\lim_{n=\infty} U(A_n) = U(A)$.

Si dimostra che ogni operazione continua in un insieme estremale è limitata, ed ha effettivamente un massimo o un minimo.

Si generalizzano i teoremi del prof. Arzelà sulle serie quasi-uniformemente convergenti.

Si osserva che l'insieme derivato di uno degli insiemi E considerati può non essere chiuso. Affinchè ciò avvenga, si deve restringere lo studio a classi particolari di insiemi. E il Fréchet si limita a quegli insiemi V, che godono della seguente proprietà, oltre a quella già supposta:

Due enti qualunque A e B di V individuano un numero (voisinage) $(A, B) = (B, A) > 0$ tale che $(A, B) = 0$ allora e allora soltanto che A, B coincidono, e tale che, dato un numero positivo qualunque ε si possa trovare un altro numero positivo $\varphi(\varepsilon)$ in guisa che $\lim_{\varepsilon=0} \varphi(\varepsilon) = 0$, e che, se $(A, B) \leq \varepsilon$, $(B, C) \leq \varepsilon$, sia $(A, C) < \varphi(\varepsilon)$.

Gli insiemi che godono questa proprietà, hanno un insieme derivato chiuso, e sono da Fréchet detti insiemi V.

Si dimostra qualche teorema relativo agli insiemi condensati, che sono contenuti in un insieme V, e qualche altra proposizione analoga ai teoremi noti per gli ordinari insiemi di punti.

Si dice che un insieme V ammette una generalizzazione del teorema di Cauchy, se vale il teorema: *Una serie* A_1, A_2..,.. *di enti di* V *ha un limite, se, dato un numero* ε *piccolo a piacere, si può trovare un numero* n, *tale che* $(A_n, A_{n+p}) < \varepsilon$ per $p > 0$.

Un insieme di enti si dice separabile, se esso è l'insieme derivato di un insieme numerabile di enti, tutti contenuti in V.

E di nuovo si limita il campo degli insiemi V studiati agli insiemi V normali (insiemi V perfetti, separabili, per cui vale il teorema di Cauchy). E per essi si dimostra, fra l'altro, il seguente bel teorema:

Digitized by Google

Ogni insieme non numerabile formato di elementi di una classe normale V è condensato.

Ritornando alle classi V più generali, si definiscono in nuovo modo, per mezzo del *voisinage*, le operazioni continue, dimostrando che, se E è un insieme estremale, contenuto in V, le operazioni continue in E vi sono pure uniformemente continue.

Se per tre enti A, B, C di un insieme V, si ha $(A, B) + (B, C) \geqq (A, C)$, il numero (A, B) si dice scarto degli elementi A, B e l'insieme si chiama insieme (E).

E si dimostra che condizione necessaria e sufficiente affinchè ogni operazione continua in un insieme I di elementi, tutti appartenenti a un insieme (E), sia limitata, e abbia un massimo, è che I sia estremale.

Dei teoremi generali, a cui abbiamo rapidamente accennato, il Fréchet fa quindi alcune applicazioni particolari.

La prima è un'applicazione dei teoremi generali alle funzioni di una variabile, mostrando con quanta facilità molti teoremi noti per le funzioni di una variabile x, definite in un intervallo finito, si possono estendere alle funzioni di una variabile x, definite per ogni valore della x.

Così p. es., se $f_1, f_2, f_3, \ldots$ sono funzioni continue della x, definite per ogni valore della x, condizione necessaria e sufficiente affinchè $\lim_{n=\infty} \sum_1^n f_n$ esista e sia una funzione continua della x, è che la serie $f_1 + f_2 + f_3 + \ldots$ sia quasi-uniformemente convergente (non già in tutto l'intervallo $-\infty < x < +\infty$) ma in ogni intervallo finito.

Una seconda applicazione è fatta, prendendo come elementi della classe E le funzioni uniformemente continue di una variabile x in un dato intervallo I. Si vede tosto che si può *definire* lo scarto di due elementi di E, chiamando scarto di due funzioni continue $f(x)$, $g(x)$ il massimo di $|f(x) - g(x)|$ in I. L'insieme E delle funzioni continue in I si riconosce facilmente essere un insieme normale. Infatti esso soddisfa alle condizioni di Cauchy generalizzate, e si può in infiniti modi trovare un insieme numerabile di funzioni continue $f_1, f_2, f_3 \ldots$ tale che ogni altra funzione continua in I si possa considerare come limite di infinite funzioni, scelte tra le $f_1, f_2, f_3 \ldots$

Si danno alcuni teoremi, di cui il più interessante è la generalizzazione del teorema di Arzelà alle operazioni funzionali in un campo qualunque, formato da funzioni continue in un intervallo I.

Come terzo esempio, si studiano le operazioni di infinite variabili, $x_1, x_2, \ldots, x_n \ldots$ L'insieme E è in tal caso formato da elementi, ciascuno dei quali si determina, dando i valori delle $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$

Lo scarto di due elementi

$$x'_1, x'_2, x'_3 \ldots \ldots \qquad x''_1, x''_2, x''_3 \ldots \ldots$$

Digitized by Google

viene definito come il valore di

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x'_n - x''_n|}{1 + |x'_n - x''_n|} \frac{1}{n!}.$$

Si può poi dimostrare facilmente che l'insieme E in discorso è un insieme normale, e applicare i teoremi generali; si può così p. es., estendere il teorema più volte citato di Arzelà anche alle funzioni di infinite variabili.

Un quarto esempio è fornito quando si assuma come insieme E l'insieme delle funzioni olomorfe di una variabile z in un campo A.

Infine si studiano le funzioni di linee, vale a dire si assume come insieme E l'insieme delle curve, che si possono definire nel seguente modo. Siano f, g, h tre funzioni continue di t in uno stesso intervallo I: $a \leq t \leq b$ e che non sono insieme costanti in alcun intervallo interno a I, o che sono insieme costanti in tutto I. Le formole $x = f(t)$, $y = g(t)$, $z = h(t)$ $(a \leq t \leq b)$ definiscono nello spazio (x, y, z) una curva continua (eccezionalmente ridotta a un punto) che si assume come elemento generatore di E al variare delle f, g, h. A funzioni di curve il Fréchet può applicare i suoi risultati generali. Il punto più delicato è di vedere in qual modo si possa definire lo scarto di due curve continue.

Per giungere a quella definizione Fréchet procede nel seguente modo: Se $x = f(t)$, $y = g(t)$ $z = h(t)$ $(a \leq t \leq b)$ è una delle nostre curve, si potrà in infiniti modi trovare un'altra terna di funzioni f_1, g_1, h_1, che soddisfacciano alle proprietà prime enunciate per le f, g, h, e tali che la curva

$$x = f_1(t) \qquad y = g_1(t) \qquad z = h_1(t) \qquad (a \leq t \leq b)$$

coincida con la curva iniziale. Noi diremo che queste ultime formole ci danno un'altra *rappresentazione* della nostra curva. Siano ora

$$\left.\begin{array}{llll} x = \varphi(t) & y = \varphi(t) & z = \chi(t) & \\ x = u(t) & y = v(t) & z = w(t) & \end{array}\right\} \; a \leq t \leq b$$

due delle nostre curve. La espressione

$$\sqrt{(\varphi - u)^2 + (\varphi - v)^2 + (\chi - w)^2}$$

avrà un massimo $d \geq 0$. Facendo variare in tutti i modi possibili le rappresentazioni delle due curve, d acquisterà infiniti valori, il cui limite inferiore si può definire come *scarto* delle due curve.

Il lavoro di Fréchet finisce con due note: la prima, e più importante, ha per scopo di dimostrare l'esistenza di funzioni continue non decrescenti, che sono costanti soltanto in certi intervalli fissati a *priori*.

GUIDO FUBINI.

Digitized by Google

NOTIZIE

DA UN DISCORSO POSTUMO DI P. TANNERY. Il *Bulletin des sciences économiques et sociales du Comité des travaux historiques et scientifiques*, année 1904 (Paris 1906) contiene un breve discorso del compianto P. Tannery su « Les sociétés savantes et l'histoire des sciences », dal quale estragghiamo, ritenendo far cosa grata ai nostri lettori, le osservazioni seguenti:

« Importa, al più alto grado, per approfondire quest'ultima (*la storia delle scienze*) di avere per ogni epoca dei dati precisi intorno al mezzo intellettuale dal punto di vista scientifico; ora gli è nel livello e nel carattere dell'insegnamento scientifico dell'epoca che si riflette più chiaramente tale mezzo; sono dunque questi lineamenti che importa ritrarre.

Nel modo in cui si tratta più spesso la storia delle scienze, modo cui, per dir vero, si è quasi obbligati di adottare nei libri, cioè attaccandosi soltanto ai grandi nomi ed alle grandi scoperte, si è quasi fatalmente indotti a farsi un'idea totalmente sbagliata della parte rappresentata dai grandi scienziati, epperò si rendono incomprensibili i giudizi pronunciate sulle lor opere dai contemporanei. Un'invenzione, in algebra per esempio, quella degli esponenti fatta da Descartes, ci è presentata come una *proles sine matre creata*, e ci si meraviglia a ragione che i primi lettori della *Geometria* non l'abbiano ammirata quanto meritava La verità è che questa idea « era nell'aria » da tempo, anzi che era già quasi completamente realizzata, persino nei libri didattici, e che a questo riguardo, il grande merito di Descartes non è tanto di averle data un'espressione definitiva, quanto d'aver mostrato, mediante esempi rimasti celebri, come essa permettesse di risolvere dei problemi che arrestavano prima gli algebristi, e di affrontare delle questioni che non erano state concepite ancora. Gli è dunque a ragione che i contemporanei di Descartes ammirarono nella sua opera la potenza e l'ingegno del calcolatore, piuttosto che la scelta d'una notazione che in realtà era già nota.

E ciò che importa osservare su quest'invenzione, perchè si ha qui un fatto che si è riprodotto assai spesso nella storia delle scienze, è che quello che è realmente originale nel concetto moderno dell'esponente, cioè il concetto d'un numero che può assumere valori frazionari o negativi, risale al XV e persino al XIV secolo, a Nicola Chuquet e a Nicola Oresme, ma che allora queste idee, di gran lunga troppo avanzate per l'epoca, rimasero infeconde e che anzi fu soltanto dopo Descartes che s'introdussero effettivamente nelle matematiche.

Digitized by Google

Le esposizioni della storia delle scienze, anche le migliori, producono un'altra illusione; cioè che quando una scoperta sia fatta e pubblicata, ci si figura agevolmente che sia divenuta un bene comune, che sia sparsa dovunque. Per l'epoca nostra, grazie all'ampia diffusione della stampa scientifica, ciò è approssimativamente vero; tuttavia tutti quelli che sono al corrente dello stato dell'insegnamento sanno che in realtà il suo livello non raggiunge che con qualche ritardo quello della scienza acquisita. Ora in un'epoca ancor poco lontana da noi questo ritardo era molto più considerevole, e più l'epoca è lontana e più esso è grande. Superfluo aggiungere che meno alto è il livello dell'insegnamento, più le idee nuove stentano a diffondervisi.

L'esatta determinazione del livello e del carattere dell'insegnamento scientifico nei vari momenti della storia offre, dunque, un grande interesse, come ho tentato di spiegare. D'altronde questa determinazione non è senza difficoltà e reclama il concorso di parecchi lavoratori; si tratta d'investigare per ogni stabilimento d'istruzione quali furono i libri di testo adoperati successivamente, ovvero i quaderni scolastici od i corsi, redatti dai professori, rimasti manoscritti. È probabile che la maggior parte di tali documenti, almeno per questi due ultimi secoli, non presentino un interesse sufficiente per consigliarne la pubblicazione. Ma l'indicazione di quelli esistenti ed una buona analisi di quanto contengono somministrerebbero utilissimi materiali. Pel XVI Secolo e pel Medio Evo specialmente la pubblicazione dovrebb'essere incoraggiata ».

***

Tema proposto dall'Accademia delle Scienze del Belgio per l'anno 1907. « Fra gli elementi di due forme di 2ª specie (cioè due sistemi piani non conjettivi, un sistema piano ed una stella o due stelle non concentriche) è stabilita una corrispondenza quadratica nel senso di Reye (*Geometrie* du Lage, T. II, cap. XXII). Studiare i sistemi di elementi che nascono determinando le congiungenti o le intersezioni delle coppie di elementi corrispondenti nelle due forme. » Premio L. 800; scadenza 1° Agosto 1907.

***

Il 13 Febbraio 1905, giorno in cui ricorreva il primo centenario della nascita di G. P. Lejeune Dirichlet, non passò inosservato in Germania. Un intero volume (il CXXIX) del *Journal f. die reine und angew. Mathematik* è dedicato alla sua memoria. E nel XXI vol. (1906) della *Naturwissenschaftliche Rundschau* il Prof. E. Lampe ne ricorda uno dei lati dell'attività didattica (*Dirichlet als Lehrer*

Digitized by Google

der allgemeinen Kriegsakademie; a fornire tali notizie egli era specialmente indicato essendo stato il successore di Kummer, il quale a sua volta aveva occupato, nella scuola di guerra, il posto lasciato vuoto al Dirichlet quando, nel 1855, egli lasciò Berlino per Gottinga.

***

PUBBLICAZIONI RECENTI SULLA STORIA DELLE MATEMATICHE:

H. BOSSMANS. *Le fragment de commentaire d'Adrien Romain sur l'Algèbre de Mohamed ben Musa el-Chovârezmi;* Annales de le Soc. sc. de Bruxelles, T. XXX, 2e Partie 1906 [Interessanti notizie sopra il frammento *esistente* (malgrado l'opinione contraria del Gilbert) nella Biblioteca di Louvain di un' opera d' algebra d'Adriano Romano pubblicata nel 1598 o 1599. Auguriamo che tale pubblicazione del dottissimo Padre induca a cercare se di tale opera non si trovi altrove qualche altro esemplare completo].

A. FAVARO. *Quale il domicilio di Galileo in Roma durante il secondo processo*; Archivio storico italiano, Sez. V, T. 37, 1906. [Secondo il ben noto editore di Galileo tale domicilio, sarebbe stato non la Villa Medici, attuale sede dell'Accademia di Francia, ma il cosidetto Palazzo Firenze, ove ora trovasi il Ministero di Grazia e Giustizia].

A. FAVARO. *Amici e corrispondenti di Galileo Galilei. XVI. Beniamino Engelecke. XVII. Lodovico Settala.* Atti del R. Istituto Veneto, T. LXV, 1906.

G. V. SCHIAPARELLI. *Venusbeobachtungen und Berechnungen der Babylonier.* Das Weltall, VI. Annata 1906.

J. TANNERY. *Manuscrits et papiers inédits de Galois.* Bull. des Sciences math. 2e Sér., T. XXX, 1906.

F. AMODEO. *Nuove analisi del trattato delle coniche di Gérard Desargues e cenni su I. B. Chaveau.* Red. della R. Acc. di Napoli, Luglio-Agosto 1906.

***

LA SCORRERIA FATTA DA JACOBI NELLA POLITICA, che i matematici conoscono in seguito alla magistrale biografia del Königsberger (cfr. *Bollettino*, VIII, 1905, p. 61), forma il soggetto di un interessante scritto di W. Ahrens (*Ein Beitrag zur Biographie C. G. J. Jacobis;* Bibl. Math., III Reihe, VII Bd. 1906); nel quale, coll'aiuto dei giornali politici dell'epoca e di altre pubblicazioni, vien narrato come, nell'Aprile 1848, sorgesse l'idea di affidare al sommo matematico l'ufficio di deputato e quali vive discussioni essa generasse. L'au-

Digitized by Google

tore potè anche sfruttare largamente il carteggio di Jacobi con suo fratello Maurizio (l'inventore della galvanoplastica), carteggio alla cui pubblicazione egli attualmente attende.

***

Un'opera classica sull'attuaria è l'*Ecalution of annuities on lives* di A. de Moivre, di cui si conoscono tre edizioni (1721, 1742, 1756) e una traduzione italiana (*La dottrina degli azzardi*) fatta nel 1776 sotto gli auspici del celebre Gregorio Fontana, per servire di testo a lezioni che allora tenevansi nell'Università di Pavia. Ora della stessa opera il Prof. Czuber ha di recente pubblicato una traduzione tedesca nelle Versicherungswissenschaftlichen Mitteilungen 1906 (*A. de Moivres Abhandlung über Leibrenten*), traduzione che è frutto e prova dell'interesse che oggi desta la teoria delle assicurazioni tanto fra i teorici quanto fra gli uomini d'affari.

***

Catalogo internazionale della letteratura scientifica. Per rendere più precisa la classificazione già nota ai nostri lettori (v. *Bollettino*, IV, 1901, p. 65) vennero di recente aggiunte le seguenti classi intermedie:

A. *Matematica*. 0032. Bibliografie. 0035. Tavole di funzioni matematiche. 1625. Somme finite. Serie ricorrenti. 1635. Teoria della statistica. Matematica dell'assicurazione. 2815. Frazioni continue ed equazioni indeterminate. 5655. Altri metodi d'integrazione delle operazioni differenziali della fisica matematica. 8075. Configurazioni speciali di punti, linee, piani od altri elementi. Divisione dello spazio. 8155. Geometria differenziale delle congruenze ed altre applicazioni del Calcolo differenziale agli elementi dello spazio.

B. *Meccanica*. 0032. Bibliografie. 3245. Sistemi elastici.

***

Pubblicazioni recenti sulla storia delle scienze positive:

E. Wiedemann, *Beiträge zur Geschichte der Naturwissenschaften:* IV. *Ueber Wage bei den Arabern.* V. *Auszüge aus arabischen Enzyklopädien und anderes.* VI. *Zur Mechanik bei den Arabern* (Sitzungsber. der phys. med. Sozietät in Erlangen, vol. 37 e 38, 1905 e 1906). *Ueber die Lage der Milchstrasse nach Ibn al Haitam* (Zeitschrift für populäre Astronomie « Sirius », 1906).

S. Vogl. *Die Physik Roger Bacos* (13. Jahr.). Inaugural-Dissertation, Erlangen 1906.

Bestonzo Pietro, Gerente.

Genova - Tipografia R. Istituto Sordomuti - 1906.

Digitized by Google

INDICE DEI NOMI

Abel 109, 110.
Agnesi 84.
Ahrens 69 *n*. 127.
Aida 71.
Aijma 71.
Akaki 69, 70.
Alberti 69 *n*.
d'Alembert 1, 4, *n*. 7, 8, 12, 102.
Alfonso (Re) 47.
Almagià 30.
Amaldi 82, 84, 109.
Amodeo 46, 62, 94, 127.
Ampère 93.
Appell 22, 24.
Apollonio 94, 118.
Archimede 16, 17, 18, 85, 96, 108.
Archita 85.
Aristotile 14, 15, 16.
Arneth 80.
Arrighi 80-81.
Arzelà 19, 20, 122, 123.

Bachet 63.
Bachmann 58-59.
Bacone R. 128.
Badouère 63.
Ball Rouse 81.
Balzer 91.
Barrow 96.
Bayes 111, 114.
Beltrami 33, 38, 76, 108.
Bemporad 103.
Benedetti 13.
Bernoulli 84, 96, 113.
Bertrand 49, 85.
Berzolari 38 *n*.
Besso 11 *n*. 12 *n*.
Betti 76.
Biermann 59, 58.
Bigourdan 59. 60.
Bjerkness 31, 109.
Binoux 62.
Blythe 86-87.
Bolyai 26, 28, 36, 64, 107, 108.
Bonola 38, 107, 109.
Boole 74.
Bordin 62.
Bordoni 37 *n*.
Borel 62.
Bosmans 127.
Boudier 32.
Bourget 78.
Brückner 73.
Bruns 111, 114.
Bucherer 46.
Bürklen 61.

Campbell 83, 84.
Cantor H. 105, 106.
Cantor M. 71 *n*. 81, 95.
Caravelli 46.
Cardano 13, 17, 69 *n*.
Carra de Vaux 14.
Casorati 38, 184.
Castelli 10.
Castelnuovo 82.
Cauchy 94, 57, 73, 76, 117, 122, 123.
Caldarera 72, 74.
Cavalieri 81, 96.
Caverni 104.
Cayley 29, 87, 109.
de Cessac 38.
Chappuis 22, 24.
Chasles 26, 84, 95, 119.
Chaveau 127.
Chelini 115 *n*.
Chuquet 69 *n*. 125.
Ciani 56.
Clebsch 39, 88.
Clifford 76, 109.
Christensen 97.
Copernico 29.
Cossali 81.
Cournot 25.
Couturat 96.
Cranz 30.
Cramer 115.
Cremieu 93.
Cremona 92, 96, 119.
Czuber 80, 128.

Damoiseau 62.
Dandelin 55.
Darboux 22, 48, 74, 87.
Dedekind 26, 58, 59.
Dehn 28, 108.
Delaunay 85.
Desargues 27, 55, 127.
Descartes 73, 84, 102, 125.
Dimostrato 84.
Diofanto 81.
Dirichlet (vedi Lejeune Dirichlet).
Doehlemann 119.
Duhamel 39.
Duhem 13-18.

Eichenwalds 94.
Eisenstein 48, 50, 57.
Endo 65.
Engel 21, 83.
Engelecke 127.
Engi 67.
Enriques 52, 54, 55, 103, 118
Erone 14, 63, 90.
Euclide 48, 107, 108, 118.
Eudosso 85.
Eulero L. 22 *n*. 3, 4, *n*. 7, 8, 9, 12, 49, 49 *n*. 50, 73, 95, 96.

Digitized by Google

Eulero J. A. 3, 7.

Fabroni 10, 11.
Fabry 62.
Favaro 63, 127.
Fayet 62.
Fechner 114.
Fergola 46.
Fermat 49, 85.
Ferrari Ludovico 13.
F. C. M. 60.
Fiedler 86 *n.*
Fine 99-103.
Fischer 25.
Fiujita 71.
Flauti 103.
Fontana 128.
Franchi-Maggi 37, 38, 38 *n.*
Francoeur 62.
Fregiér 98.
Fréchet 120, 124.
Fricke 18, 19.
Frisi 1, 4, 4 *n.* 5, 5 *n.* 6, 6 *n.* 8, 9, 10, 10, 10 *n.* 11, 94.
Fubini 103, 124.
Fuhrmann 21.
Fujita 71.

Galileo 16, 23, 85, 127.
Galois 59, 127.
Gans 20.
Gauss 48, 49, 50, 57, 74, 96, 108.
Genocchi 50.
Gerhadt 80.
Gerland 94.
Gerling 74.
Giacobini 62.
Gilbert 34.
Girard 49.
Giudice 106.
G. L. (vedi Loria).
Gmeiner 58.
Gokai 72.
Goldbach 48.
Graf 29, 95.
Grandi 10 *n.* 11 *n.* 85.
Grassmann 21-22, 104
Green 42, 44, 93.
Greenhill 7 *n.*
Guglielmini 10 *n.*
Guichard 87.
Guldino 74, 81.
Gunther 7 *n.*
Gustavo Adolfo 83.
Guzmann 82.

Hankel 105.
Hastal 63.
Hauck 30.
Hayashi 65, 72.
Heffter 90, 92.
Heger 71.
Helmholtz 37, 108.
Henke 61.
Herbart 76 *n.*
Hermite 38-40, 48.
Hertz 93, 94.
Hessenberg 30, 96.
Hilbert 28, 64.
Hjemslev 97-99.
Holzmuller 111, 115.
Horn 120.
Horner 102.
de l'Ospital 96.
Houtain 63.
Huygens 23, 94, 95.

Ibn al Haitan 128.
Ino 71.
Inamura 68.
Isomura 68.
Ipazia 71.

Jacobi 18, 57, 94, 109, 115, 127, 128.
Janssen 69.
Joachimstahl 94.
Jomei 66.
Jonquiéres 21.

Kapteyn 62.
Kenmochi 72.
Kikuki 71, 72.
Klein 31, 50. 64, 76, 87, 106, 109.
Kneser 30.
Knoblauch 30.
Koehler 90.
Königsberger 110, 129
Kötter 30.
Koide 72.
Kommerel K. 89.
Kommerell V. 89.
Koppe 30.
Korn 41, 42, 43, 45.
Kossak 105.
Kronecker 57.
Kubota 72.
Kuwamoto 72.
Kummer 127.

Lagrange 2 *n.* 3, 4, 4 *n.* 5, 7, 8, 12, 48, 49, 50, 81, 96.
Lalande 10, 62.
Laisant 75, 76.
Lallemand 62.
Lambert 108.
Lamè 85.
Lampe 30, 126.
Laplace 45 *n.* 96.
Lauricella 46.
Lechalas 24, 25.
Legendre 18, 39, 49, 57, 73, 108.
Leibniz 30, 81, 85, 94.
Lejeune-Dirichlet 40, 44, 41 *n.* 42, 43, 43 *n.* 49, 57, 126.
Lhuillier 73.
Leonardo Pisano 81.
Lemoine 104.
Lerch 57.
Le Roy 41.
Lexell 28.
Lexis 44.
Liapounoff 41, 42, 43.
Libri 46, 80.
Lie 83, 108.
Lindemann 83.
Liouville 106.
Lobatschewski 36, 37, 108.
Lorentz 93, 94.
Loria 18, 20, 21, 22, 25, 29, 39, 40, 46, 31, 60, 61, 62, 65, 75, 76, 81, 86, 87, 89, 90, 92, 99, 104, 106, 110, 115, 116, 117, 119, 120, 127.

Digitized by Google

Lucas 50.
Lüroth 57.

Macfarlane 63.
Macaulay 118, 119.
Maclaurin 2 *n.* 84.
Maggi G. A. 38, 38 *n.*
Maggi E. 38.
Mahler 119.
Marcolongo 12, 21, 92.
Marotte 39.
di Martino 49.
Matrot 50.
Maxwell 31, 93.
Matsumura 63.
Matsunaga 69, 70.
Mellin 79.
Méray 32.
Mesnager 62.
Meyer 63.
Milhaud 54.
Mittag-Leffler 110 *n.*
Möbius 53.
Mohamed Ben Musa 127.
de Moivre 128.
Mombu 66.
Monge 93, 106.
Montyon 62.
Montucla 10, 11.
Mori 67.
Mozzi 1, 6, 6 *n.* 10, 11.
Müller E. 92.
Muller F. 94.
Müller R. 30, 96.
Murata 72.
Muir 115, 116.

Nakane 70.
Nallino 47.
Nasir-Eddin 103.
Nemorario 13, 14, 15, 17.
Neumann C. 40, 40 *n.* 41, 42, 42 *n.* 43, 43 *n.* 44, 45 45 n. 46, 93.
Neumann E. R. 40, 46.
Newcomb 113.
Newton 12, 51, 81. 84.
Nicomede 84, 85.
Niedenzu 20.
Nielsen 31, 77, 80.

Ono 72.
Oresme 125.
Osgood 116, 117.
Ota 69.
d'Ovidio, 36 *n.* 91.

Pappo 74, 75.
de Paolis 56.
Papin 94.
Pascal B. 25, 26, 54, 69.
Pascal S. 84, 86.
Pasch 28.
Pasquier 39.
Peirder 93.
Perelli 1, 9, 10, 10 *n.* 12.
Perrotin 62.
Perry 31.
Perseo 84.
de Pesloüan 103, 110.
Petit d'Ormoy 62.
Pezenas 2 *n.*
Picard 38.
Pickering 62.
Pincherle 105.
Pinkus 25.
Pitagora 67.
Pizzetti 114.
Plücker 89.
Poggendorff 10.
Pohlke 52, 98.
Poincaré 41, 42, 42 *n*, 43. 44, 45, 46, 64.
Poinsot 85.
Poisson 113.
Poncelet 18, 62.
Pontécoulant 62.
Porro 47.
Poynting 93.
Preuss 30.
Puissant 103.

Radicati 6, 8, 8 *n*, 9. 9 *n.*
Rados 64.
del Re 117-118.
Reinhold 47.
Reissner 30, 96.
Reye 87, 119, 126.
Ribaucour 85.
Riccardi 11 *n.*
Riccati V 86 *n.*
Ricci 11 *n.*, 94.
Riemann 36 *n.*, 37, 44, 108, 117.
Rivard 103.
Robin 40, 40 *n.*, 42, 43, 44, 45, 45 *n.*, 46.
Rolle 84, 102.
Romano 127.
Rothe 30, 96.
Rowland 93.

Saccheri 107, 108.
Sacrobosco 103.
Saito 72.
Salmon 86 *n.*
Salkowski 96.
Salvadori 57.
Sandor 96.
Sawaguchi 68.
Schfheitlin 30.
Scheffers 83.
Schellbach 94.
Scherk 115.
Schiaparelli 47, 127.
Schirdewan 96.
Schlaefli 29, 73, 74, 87, 95.
Schlezel 74.
Schlesinger 120.
Schloemilch 24.
Schoute 73, 75.
Schroder E. 92.
Schroderer R. 50-51.
Schubert 89, 90, 104.
Schur 96.
Schwarz 18, 43, 44.
Schweinkart 108.
Schweins 115.
Segre 108.
Segner 37.
Seki 65, 66, 68, 69, 70, 71.
Settala 127.
Severi 52, 56.
Severini 20.
Simon M. 103, 106.
Simson 94, 95.
Skutsch 96.
Sluse 85.
Solmi 63.
Sonzogno 96.
Stahl 89.

Digitized by Google

Staude 90.
Staudt 25, 117, 119.
Steiner 73, 119.
Stekeloff 40 *n*., 41, 42, 45.
Stern 37.
Stevin 15, 17, 49.
Stieltjes 39, 40.
Stirling 78, 79
Stolz 28, 58.
Stott 74.
Stouff 38, 62.
Stringham 73.
Sturm C. 102.
Suzukima 71.
Sylvester 85, 86 *n*., 104.

Takebe 69.
Takemura 72.
Talbot 85.
Tannery J. 23, 127.
Tannery P. 23, 62, 63, 64, 81, 125.
Tardy 57.
Tartaglia 13, 96.
Taurinus 108.
Taylor 58.
Tchebycheff 49.
Teuchi 66.
Teixeira, 31. 84, 86.
Thomae 18, 90.
de Tilly 108.
Tipaldo 10.
Torricelli 11. 18.
Toyotoni-Taiko 67.

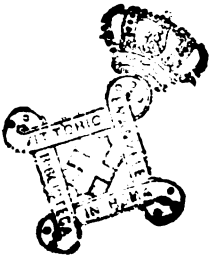
Uchida 72.

Vacca 50.
Vahlen 25-28.
Vailati 18.
Vaillant 62.
Valentin 95.
Valz 62.
Verri 6 *n*.
da Vinci Leonardo 13, 17, 63.
Vitale Giordano 107, 108.
Vivanti 57, 58, 59, 80, 117, 120.
Viviani 11 *n*., 85.
Vogl 128.
Vonderlin 120.

Wachter 108.
Wada 71.
Wallenberg 96.
Wallis 107.
Wang-Pao-San 66.
Wang-Tao-Liang 66.
Watt 85.
Weber 93.
Wegener 47.
Weierstrass 18, 27, 58, 95, 105.
Wertheim 48.
Wiedemann 128.
Wieleitner 88-89.
Wilson 50, 94.
Wölffing 101.
Wolf 103.
Wolf 95.
Wronski 115.

Yoshida 67.

Zacharias 30, 96.
Zaremba 45.
Zeemann 93.
Zeuthen 87.
Zülke 30, 96.



CARLO CLAUSEN

HANS RINCK Succ.

LIBRAIO DELLE LL. MM. IL RE E LA REGINA

e della R. Accademia delle Scienze di Torino

11, Via Po — TORINO — Via Po, 11

La Libreria Carlo Clausen

spedisce gratuitamente a chi li richiede i seguenti Bollettini trimestrali:

N. I. Bollettino di Scienze Mediche
» II. Bollettino di Scienze Tecniche
» III. Bollettino di Novità Letterarie
» IV. Bollettino di Scienze Naturali

e s'impegna, a richiesta, di tenere correntemente informati i Clienti di tutte le pubblicazioni in qualunque lingua che si riferiscano ai loro studi speciali.

CATALOGO ANTIQUARIO

MATEMATICA

FISICA

ASTRONOMIA

Si spedisce *gratis* a chi ne fa richiesta

Digitized by Google

SOMMARIO DEL FASCICOLO

RECENSIONI ED ANNUNZI.

J. HJEMSLEV. *Deskriptivgeometri* [G. L.].
H. BURCHARD FINE. *A College Algebra* [G. FUBINI].
H. SIMON. *Uber die Entwickelung der Elementar-Geometrie* [G. L.].
H. SIMON. *Methodik der elementaren Arithmetik* [G. L.].
L. MORAND. *Généalogie de la famille Monge* [G. L.].
R. BONOLA. *La geometria non-euclidea* [U. AMALDI].
C. L. DE PESLOÜAN. *N. H. Abel* [G. L.].
The Teaching of elementary Mathematics [G. L.].
H. BRUNS. *Wahrscheinlichkeitsrechnung und Kollektivmasslehre* [P. PIZZET.].
G. HOLZMUELLER. *Planimetrie für das Gymnasium* [G. L.].
T. MUIR. *The theory of determinants in the historical order of development* [G. L.].
W. E. OSGOOD. *Lehrbuch der Funktionentheorie. I, 1* [G. VIVANTI].
A. DEL RE. *Lezioni sulle forme fondamentali dello spazio rigato* [G. L.].
F. S. MACAULAY. *Geometrical conics* [G. L.].
G. MAHLER. *Ebene Geometrie* [G. L.].
K. DOEHLEMANN. *Projective Geometrie* [G. L.].
J. VONDERLIN. *Parallelperspektive, rechtwinklige Axonometrie* [G. L.].
J. HORN. *Gewöhnliche Differentialgleichungen* [G. L.].
M. FRÉCHET. *Sur quelques points de calcul fonctionnel* [G. FUBINI].

NOTIZIE.

Da un discorso postumo di P. Tannery. — Tema proposto dall' Accademia delle scienze del Belgio. — Il 13 Febbraio 1905. — Pubblicazioni recenti sulla storia delle matematiche. — La scorreria fatta da Jacobi nella politica. — Un' opera classica sull'attuaria. — Catalogo internazionale della letteratura scientifica. — Pubblicazioni recenti sulla storia delle scienze positive.

IL BOLLETTINO DI BIBLIOGRAFIA E STORIA

DELLE

SCIENZE MATEMATICHE

si pubblica a fascicoli trimestrali di almeno 32 pagine cadauno.

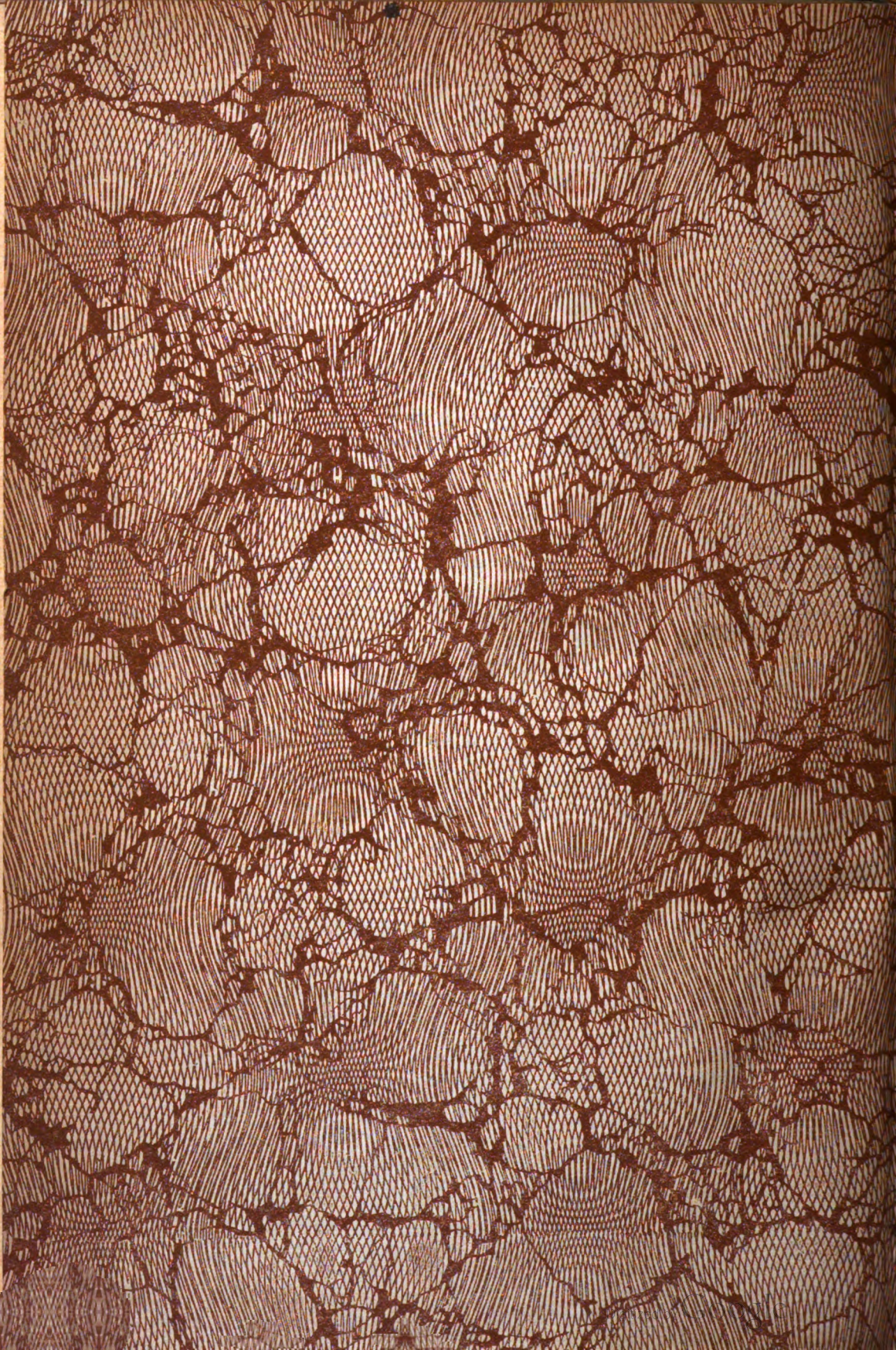
L'abbonamento è fissato al prezzo annuo di **L. 6** per l'Italia e di **L. 7,50** per l' Unione Postale, *pagabili anticipatamente*.

Gli abbonamenti si ricevono presso l'editore **Carlo Clausen (Hans Rinck Succ.)** in **Torino** - Via Po, N.° 11 - e presso i principali librai d' Italia e dell' estero.

Per quanto concerne l'Amministrazione rivolgersi esclusivamente all'Editore stesso. Indirizzare invece lettere, manoscritti, libri, giornali e tutto ciò che riflette la Redazione al **Prof. Gino Loria** della R. Università di **Genova.**

Digitized by Google

Digitized by Google



Digitized by Google

Digitized by Google